This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

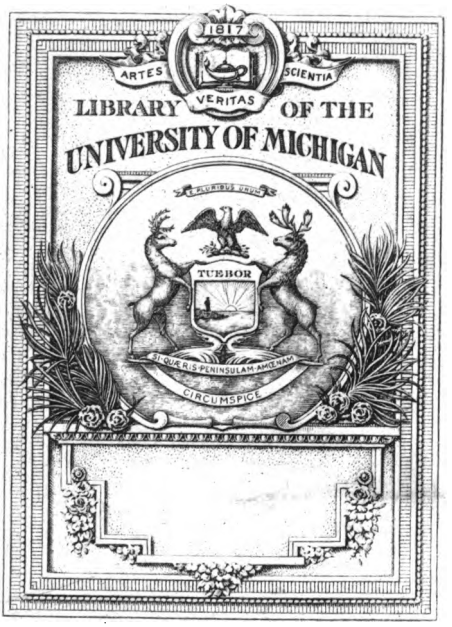
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`




Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Alla Società Italiana
delle Scienze, residente
in Modena.

Omaggio dell'Autore.

Digitized by Google

Digitized by Google

# MEMORIE

DI

# MATEMATICA

DELL'ABBATE

# BARNABA TORTOLINI

Digitized by Google

Digitized by Google

# DETERMINAZIONE
# DELL' INTEGRALI
## DI ALCUNE FORMOLE
# DIFFERENZIALI
## SI' ALGEBRICHE, CHE TRASCENDENTI

*del dottor*

**B. TORTOLINI**

**Roma**
TIPOGRAFIA BOULZALER
1833

Digitized by Google

Mathematics
QA
3
.T7

Digitized by Google

b. com.
aglione
1028
615



Determinazione dell' integrali delle formole differenziali espresse per

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^n} \\ \dfrac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\phi+q^2x^2)^n} \\ \dfrac{(f+g\cos\phi)d\phi}{(a+b\cos\phi)^n} \end{array} \right.$$

1.° Spesso accade sì nel calcolo integrale, che nelle sue applicazioni di dover far uso dell' integrali delle formole (1) dove il numero, n, sia intero, e positivo. Tutto l'artificio per integrare queste formole consiste nel ridurle ad altre formole della medesima natura, mà dove l'esponente, n, vada sempre a diminuire dell' unità, finchè si arrivi alle formole più semplici di n=1, nel qual caso non vi sono difficoltà considerabili per l'integrazione delle dette formole. A far ciò nei cogniti trattati di calcolo integrale si pongono le seguenti equazioni.

Digitized by Google

$$(2)\begin{cases} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{Ax}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \int \frac{Bdx}{(a^2+x^2)^{n-1}} \\ \int \frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^n} = \frac{A+Bx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^{n-1}} + \int \frac{Cdx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^{n-1}} \\ \int \frac{(f+g\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n} = \frac{A\operatorname{sen}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}} + \int \frac{(B+C\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}} \end{cases}$$

per mezzo delle quali prendendo i differenziali dei due membri, per il metodo dei coefficienti indeterminati, si determinano i coefficienti A, B, C. Questa maniera di ridurre l'integrali delle formole (1) alle (2) dove n diminuisca continuatamente dell'unità mi sembra arbitraria, e mancante di prova. Il noto principiò dell'integrazione per parti mi ha condotto alle (2), e quindi all'integrazione delle (1). Esporrò brevemente il processo dell' operazioni da seguirsi, e mostrerò infine l'applicazione della prima delle (2) ad un problema di geometria, che richiede l'aiuto del calcolo integrale.

2.° Sia dunque da integrarsi la formola

$$(3) \qquad \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$$

In questo caso consideriamo il paragone della formola

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

con la cognita

$$(4) \qquad \int PdQ = PQ - \int QdP$$

e si ponga

Digitized by Google

$$P = \frac{1}{(a^2+x)^{n-1}}, \qquad dQ = dx$$

avremo subito dalla (4)

$$(5)\quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n}$$

Ora senza difficoltà scorgeremo essere

$$\frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^n}$$

e la formola (5) diviene con la sostituzione

$$(6)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left(\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}\right).$$

Quindi trasponendo i termini e dividendo per $2a^2(n-1)$, avremo

$$(7)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

In questa maniera mi sembra provata la verità della prima delle formole (2).

Che se nella (7) in luogo di n sostituiamo n-1 verrà similmente

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{x}{2a^2(n-2)(a^2+x^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2a^2(n-2)}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-2}}$$

e così di seguito finchè arriveremo alla formola

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x}{a}\right) + C$$

3.° L'integrale della formola (3) può aversi anche sotto un altro aspetto facendo uso del metodo seguente recentemente imaginato.

Sia la formola $\dfrac{dx}{x^2+y}$

e s'integri nell' ipotesi di y constante, sarà

$$\int \frac{dx}{x^2+y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{Arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{x}{\sqrt{y}}\right)$$



Digitized by Google

e poichè abbiamo

$$d\frac{1}{x^2+y}:dy=-\frac{1}{(x^2+y)^2} \qquad d^2\frac{1}{x^2+y}:dy^2=\frac{2}{(x^2+y)^3}$$

$$d^3\frac{1}{x^2+y}:dy^3=-\frac{2.3}{(x^2+y)^4}\ldots\ldots\ldots$$

$$d^n\frac{1}{x^2+y}:dy^n=\pm\frac{2.3.4\ldots n}{(x^2+y)^{n+1}}$$

quindi ricaveremo con facilità

$$\int\frac{d^n\left(\frac{1}{x^2+y}\right)}{dy^n}dx=\pm\int\frac{2.3.4\ldots n.dx}{(x^2+y)^{n+1}}=\frac{d^n\int\left(\frac{1}{x^2+y}\right)dx}{dy^n}$$

$$=\frac{d^n\left\{\frac{1}{\sqrt{y}}\text{Arc.}\left(\text{tang}=\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right\}}{dy^n}$$

e ponendo $y=h$ viene

$$(8)\quad \int\frac{dx}{(x^2+h)^{n+1}}=\pm\frac{1}{2.3\ldots n}\cdot\frac{d^n\left\{\frac{1}{\sqrt{h}}\text{Arc.}\left(\text{tang.}=\frac{x}{\sqrt{h}}\right)\right\}}{dh^n}+C$$

dove il segno + è per n pari, ed il — per n impari.

4.° Veniamo all' integrazione della seconda delle (1) cioè

$$(9)\quad \frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^n}$$

Questa formola è riducibile alla (3), se si prendano per $\alpha$, $\beta$ due quantità tali da essere

Digitized by Google

$$(10)\begin{cases} \alpha = \dfrac{p\cos\varphi}{q}, \quad \beta = \dfrac{p\,\mathrm{sen}\,\varphi}{q} \quad \text{d'onde} \\ \alpha^2+\beta^2 = \dfrac{p^2}{q^2} \end{cases}$$

il qual processo d'operazione è stato già indicato da qualcuno. In questo caso dalla (9) ricaviamo

$$\int \frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^n} = \int \frac{(a+bx)dx}{q^{2n}((x+\alpha)^2+\beta^2)^n}$$

nella quale ponendo $x+a=z$, $dx=dz$ si hà

$$(11)\int \frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^n} = \frac{\alpha-b\alpha}{q^{2n}}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} + \frac{b}{q^{2n}}\int \frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^n}$$

Ora dalla formola (7) ricaviamo

$$(12)\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \left(\frac{z}{2\beta^2(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\beta^2(n-1)}\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}\right)$$

ed anche con facile calcolo

$$(13)\quad \int \frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^n} = -\frac{1}{(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}}$$

Quindi sommando le (12) (13) dopo di averle moltiplicate respettivamente per $\dfrac{a-b\alpha}{2q^{2n}}$, $\dfrac{b}{q^{2n}}$ avremo l'integrale espresso per la (11), perciò facendo la sostizione dei valori di $\alpha$, $\beta$, $z$ ricaviamo

$$(14)\int \frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^n} =$$

$$\frac{a-\dfrac{bp\cos\varphi}{q}}{q^{2n}}\left(\frac{x+\dfrac{p\cos\varphi}{q}}{2(n-1)\dfrac{p^2\mathrm{sen}^2\varphi}{q2}\left(x^2+\dfrac{2px\cos\varphi}{q}+\dfrac{p^2}{q^2}\right)^{n-1}}\right)$$

$$-\frac{b}{2q^{2n}(n-1)\left(x^2+2\dfrac{px\cos\varphi}{q}+\dfrac{p^2}{q^2}\right)}$$

Digitized by Google

$$+\frac{\left(a-\frac{bp\cos\varphi}{q}\right)(2n-3)}{2q^{2n}(n-1)\,\frac{p^2\operatorname{sen}^2\varphi}{q^2}}\int\frac{dx}{\left(x^2+\frac{2px\cos\varphi}{q}+\frac{p^2}{q^2}\right)^{n-1}}$$

ed eseguendo i sviluppi, e riducendo al medesimo denominatore verrà

$$(15)\int\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^n}=\frac{apq\cos\varphi-bp^2+(aq^2-bpq\cos\varphi)x}{2(n-1)p^2q^2\operatorname{sen}^2\varphi(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^{n-1}}$$
$$+\int\frac{(2n-3)(aq-bp\cos\varphi)dx}{2(n-1)p^2q^2\operatorname{sen}^2\varphi(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^{n-1}}$$

Ognun vede adunque, che per mezzo di questa formola (15) viene provata la leggittimità della seconda delle formole (2), e ciò basterebbe per il mio intento, con tutto ciò accenniamo brevemente come s'integri la formola (9) nel caso di n=1. In quest'ipotesi la (11) diviene

$$(16)\int\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)}=\frac{a-b\alpha}{q^2}\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}+\frac{b}{q^2}\int\frac{zdz}{z^2+\beta^2}+C$$
$$=\frac{a-b\alpha}{q^2\beta}\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{z}{\beta}\right)+\frac{b}{2q^2}\log(z^2+\beta^2)+C$$

quindi la sostituzione dei valori di $\alpha$, $\beta$, è z datici dalla (10) produce

$$(17)\int\frac{(a+bx)dx}{(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)^n}=\frac{b}{2q^2}\log(p^2+2pqx\cos\varphi+q^2x^2)$$
$$+\frac{aq-bp\cos\varphi}{pq^2\operatorname{sen}\varphi}\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{qx+p\cos\varphi}{p\operatorname{sen}\varphi}\right)+C'$$

dove la costante è

$$C'=\frac{b}{q^2}\log.q+C$$

Essendo C la costante dell' integrazione.

5.° Vediamo come l'integrale della formola

$$(18)\quad\frac{(f+g\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$$

Digitized by Google

possa ridursi alla terza delle (2). A quest' oggetto sia z una variabile da verificare l'equazioni

$$(19)\quad z=\frac{1}{a+b\cos\varphi},\ \text{e,}\ dz=\frac{b\,\text{sen}\varphi\,d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$$

ricaveremo senza difficoltà le seguenti

$$(20)\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{1-az}{bz},\ -\text{sen}\varphi\,d\varphi=\dfrac{dz}{bz^2},\ \text{e quindi}\\ d\varphi=\dfrac{dz}{bz^2\sqrt{1-\left(\dfrac{1-az}{bz}\right)^2}}=\dfrac{dz}{z\sqrt{(b^2-a^2)z^2+2az-1}}\\ f+g\cos\varphi=\dfrac{g+(fb-ag)z}{bz},\ (a+b\cos\varphi)^n=\dfrac{1}{z^n}\end{cases}$$

Sostituendo questi valori nella formola (18) ed integrando verrà

$$(21)\quad \int\frac{(f+g\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}=\int\frac{\frac{g}{b}z^{n-2}+\left(\frac{fb-ag}{b}\right)z^{n-1}}{\sqrt{(b^2-a^2)z^2+2az-1}}dz$$

nella quale ponendo per brevità

$$(22)\begin{cases}M=\dfrac{fb-ag}{b},N=\dfrac{g}{b},\ \alpha=b^2-a^2,\beta=2a,\ \gamma=-1\\ L=Mz^{n-1}+Nz^{n-2},R=\sqrt{\alpha z^2+\beta z+\gamma}=\dfrac{b\,\text{sen}\varphi}{a+b\cos\varphi}\end{cases}$$

essa si trasformerà in

$$(23)\quad \int\frac{(f+g\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}=\int\frac{Mz^{n-1}+Nz^{n-2}}{\sqrt{\alpha z^2+\beta z+\gamma}}dz=\int\frac{Ldz}{R}$$

Adunque l'integrale della formola (18) è ridotto all' integrazione di una formola irrazionale, ma che si può rendere razionale con una conveniente trasformazione, come già si conosce. Di più l'integrale della medesima (18) è ridotto all' integrale della formola $\frac{Ldz}{R}$, la quale è molto rimarchevole per le ri-

Digitized by Google

cerche di Eulero, Lagrange, Legendre. Infatti ha dimostrato Legendre, che se si abbia la formola $\frac{Pdx}{R}$ dove P sia una funzione razionale della x, e la quantità $R=\sqrt{\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon}$

Si possono sempre trovare due numeri p, q unitamente ad una variabile y da verificare la formola $x=\frac{p+qy}{1+y}$, la quale sostituita nella $\frac{Pdx}{R}$ la riducono ad un' altra $\frac{P'dy}{R'}$, dove $R'=\sqrt{\alpha' y^4+\beta' y^3+\gamma' y^2+\delta' y+\varepsilon'}$

I nnmeri però p, q devono determinarsi ponendo $\beta'=0$, $\delta'=0$, e P' essendo una funzione razionale della y. Ora nel caso, che P' contenga le sole potenze impari della y; ponendo $y^2=z$ verrà la formola (23) ad essere un caso particolare della $\frac{Pdx}{R}$

6.° Ma andiamo ad esaminare l'integrale del secondo membro della medesima (23), e si consideri il differenziale della quantità $z^{n-2}R$, cioè

(24) $d.z^{n-2}R=(n-2)Rz^{n-3}dz+z^{n-2}dR$

e siccome dall' ultima delle (22) si ricava

(25) $dR=\frac{(2\alpha z+\beta)dz}{2\sqrt{\alpha z^2+\beta z+\gamma}}$

quindi per la sostituzione la (24) si trasforma in

(26) $d.z^{n-2}R=\frac{2\alpha(n-1)z^{n-1}dz+\beta(2n-3)z^{n-2}dz+2\gamma(n-2)z^{n-3}dz}{2R}$

ed integrando termine per termine otteniamo

(27) $z^{n-2}R=\alpha(n-1)\int\frac{z^{n-1}dz}{R}+\frac{\beta(2n-3)}{2}\int\frac{z^{n-2}dz}{R}+\gamma(n-2)\int\frac{z^{n-3}dz}{R}$

dalla quale si ha immediatamente

(28) $\int\frac{z^{n-1}dz}{R}=\frac{z^{n-2}R}{\alpha(n-1)}-\frac{\beta(2n-3)}{2\alpha(n-1)}\int\frac{z^{n-2}dz}{R}-\frac{\gamma(n-2)}{\alpha(n-1)}\int\frac{z^{n-3}dz}{R}$

Digitized by Google

il qual valore sostituito nel secondo membro della formola (23) ci ottiene un risultato della forma

$$(29)\int \frac{Mz^{n-1}+Nz^{n-2}}{\sqrt{\alpha z+^2\beta z+\gamma}}dz=\frac{Mz^{n-2}R}{\alpha(n-1)}+P\int\frac{z^{n-2}dz}{R}+Q\int\frac{z^{n-3}dz}{R}$$

dove P, Q sono espresse per

$$(30)\begin{cases} P=N-\dfrac{\beta M(2n-3)}{2\alpha(n-1)}=\dfrac{g(n-1)(b^2-a^2)(-a)2n-3)(bf-ag)}{(n-1)b(b^2-a^2)} \\ Q=-\dfrac{M\gamma(n-2)}{\alpha(n-1)}=\dfrac{(n-2)(bf-ag)}{(n-1)b(b^2-a^2)} \end{cases}$$

Se nel secondo membro della formola (29) sostituiscono i valori di z, dz presi dalla (19), ed i valori di $\alpha$ $\beta$ $\gamma$, M N P Q R presi dalle (22), e (30), il paragone della (23) colla (29) ci dà primieramente

$$(31)\int\frac{(f+g\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}=\frac{Mb\operatorname{sen}\varphi}{\alpha(n-1)(a+b\cos\varphi)^{n-1}}+\int\frac{(P+Qa+Qb\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$$

e siccome con facile riduzione

$$(32)\ P+Qa=\frac{(gb^2-af)(n-1)}{(b^2-a^2)(n-1)}$$

quindi dalla (31) deduciamo

$$(33)\int\frac{(f+g\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}=\frac{(ag-bf)\operatorname{sen}\varphi}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos\varphi)^{n-1}}+\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\left(\frac{(af-bg)(n-1)+(ag-bf)(n-2)\cos\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-2}}\right)d\varphi$$

la quale evidentemente dimostra la verità della terza delle formole (2). Esaminiamo anche qui il caso di n=1. In quest' ipotesi sarà da integrarsi la formola

$$(34)\frac{(f+g\cos\varphi)d\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{fd\varphi}{a+b\cos\varphi}+\frac{gd\varphi}{b}-\frac{gad\varphi}{b(a+b\cos\varphi)}$$

dunque un tal integrale si riduce all' integrazione della semplice formola

$$(35)\ \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$$

Digitized by Google

In due maniere si può arrivare dalla (18) alla richiesta (35) cioè, o ponendo

$f=1,\ g=o,\ n=1$

il qual modo riduce uguali all' infinito i secondi membri delle (29) e (33), il che non deve verificarsi; ovvero ponendo

$f=a,\ g=b,\ n=2$

d'onde le formole (22) (30) ci danno

$M=1,\ N=1,\ P=1,\ Q=0$

e la (29) diviene

$$(36)\quad \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha z^2+\beta z+\gamma}} = \int \frac{dz}{R} = \int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$$

Sotto due differenti forme può presentarsi l'integrale della (36), secondo chè $\alpha$ sia positivo, o negativo, ovvero b maggiore, o minore di a. Nel primo caso cioè $b>a$ l'integrale della (36), come già si conosce, si esprime per un logaritmo, cioè

$$(37)\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha z^2+\beta z+\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + z\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha z^2+\beta z+\gamma}\right)+C$$

e rimettendo i valori di z, $\alpha$ $\beta$ $\gamma$, e comprendendo sotto il valore di una sola costante anchè la quantità $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log. \sqrt{\frac{b}{b^2-a^2}}$ si avrà

$$(38)\ \int \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log\left(\frac{b+a\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos\varphi}\right)+C$$

Nel secondo caso cioè di $b<a$ ponendo $\alpha'=a^2-b^2=-\alpha$, e prendendo una variabile, y, da essere $z=\frac{\beta}{2\alpha'}-y$, ed anche, $h=\frac{\sqrt{4\alpha'\gamma+\beta^2}}{2\alpha'}$, la (36) si trasforma in

$$(39)\frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \int \frac{-d.\frac{y}{h}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{h^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} \operatorname{Arc.}\left(\cos = \frac{y}{h}\right)+C$$

Digitized by Google

e sostituendo di nuovo i valori di y h z dopo facile riduzione troviamo

$$(40)\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arc.}\left(\cos=\frac{b+a\cos\varphi}{a+b\cos\varphi}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arc}\left(\text{sen}=\frac{\text{sen}\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos\varphi}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arc.}\left(\text{tang}=\frac{\text{sen}\varphi\sqrt{a^2-b^2}}{b+a\cos\varphi}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{Arc.}\left(\text{tang}=\frac{(a-b)\text{tang}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)+C$$

Ho voluto porre sotto diversi aspetti quest' integrale, mentre in qualche occasione può esrere utile.

Nell' integrale espresso per la formola (33) vi è incluso un caso molto rimarchevole, del così detto *problema di Keplero*. Questo caso si ottiene facendo nella (33) $a=1$, $b=-e$, $n=2$, $g=o$, $f=(1-e^2)^{\frac{3}{2}}$, ed $e<1$, quindi chiamando u il valore di quest' integrale, la formola (33) unita all' ultima espressione dell'integrale datoci dalla formola (40) ci somministra

$$u=\frac{\text{sen}\varphi}{1-e\cos\varphi}e\sqrt{1-e^2}+2\text{Arc.}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\text{tang}\frac{1}{2}\varphi\right)$$

e ponendo $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\text{tang}\frac{1}{2}\varphi=\text{tang}\frac{1}{2}\theta$, colle diverse espressioni delle formole trigonometriche si ottiene, $u=e\,\text{sen}\theta+\theta$

La costante dovuta all' integrazione è nulla mentre per $u=o$, si ha $\varphi=o$. Ognun vede, che u esprime l'anomalia media, $\varphi$ la vera e $\theta$ l'eccentrica, ed e il rapporto dell' eccentricità dell' orbita all' asse maggiore

7.° L'integrale espresso per la formola (7) mi dà occasione di risolvere un problema relativo alla ci-

Digitized by Google

cloide, che non sarà inutile di osservare. Se si prenda per asse delle ascisse la base della cicloide e delle ordinate una retta perpendicolare a questa base con l'origine delle coordinate, ove un circolo di raggio, a, comincia il suo viaggio; l'equazioni della cicloide chiamando u un angolo che abbia per limite u=o u=$\pi$ per una semicicloide sono

(41) $x=a(u-\text{senu}),\quad y=a(1-\cos u)$

d'onde l'equazione differenziale

(42) $dx=dy\sqrt{\frac{y}{2a-y}}$

Ciò posto il valore di un volume V che si genera dalla rivoluzione di una curva prima intorno l'asse delle, x, è

(43) $V=\int y^2dx+C$

Sostituendo nella (43) il valore di, dx, della (42) sarà per la cicloide

(44) $V=\pi\int dy\sqrt{\frac{y5}{2a-y}}+C$

Per integrare questa formola sia, z, una variabile da essere

(45) $\begin{cases}\frac{2a-y}{y}=z^2, \text{ d'onde}\\ y=\frac{2a}{1+z^2},\quad dy=-\frac{4azdz}{(1+z^2)^2}\end{cases}$

quai valori sostituito nella (44) diviene

(46) $V=-16\pi a^3\int\frac{dz}{(1+z^2)^4}+C$

Ora dalla (7) si ha evidentemente

(47) $\int\frac{dz}{(1+z^2)^4}=\frac{z}{6(1+z^2)^3}+\frac{5z}{24(1+z^2)^2}+\frac{15z}{48(1+z^2)}+\frac{15}{48}\text{Ar.(tang=z)}$

Digitized by Google

nella quale sostituendo di nuovo il valore di z espresso per y dalla prima delle (45) dopo facile riduzione si ottiene

$$(48)\ V=\pi\int dy\sqrt{\frac{y^5}{2a-y}}+C=-16\pi a^3\left\{\frac{\sqrt{2ay^5-y6}}{48a^3}+\right.$$

$$\left.\frac{5}{96a^2}\sqrt{2ay^3-y^4}+\frac{15}{96a}\sqrt{2ay-y^2}+\frac{15}{48}\text{Arc.}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}\right)\right\}+C$$

La costante si determina per le condizioni, che essendo y=o, si ha, V=o d'onde

$$o=-16\pi a^3\frac{15}{48}\text{Arc.}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{2a}{o}}\right)+C$$

è siccome $\text{Arc.}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{2a}{o}}\right)=\frac{\pi}{2}$ quindi

$$C=\frac{5}{2}\pi^2a^3$$

la quale aggiunta all' integrale lo renderà completo. Per una semicicloide basterà porre, y=2a, d'onde dalla (48) si ricava $V=\frac{5}{2}\pi^2a^3$, e per l'intera cicloide

$$(49)\ V=5\pi^2a^3=\frac{5}{2}\pi a^2.2\pi a$$

Ma $\pi a^2$ esprime l'area del circolo genitore $2\pi a$ la circonferenza, dunque conchiuderemo. Il volume generato dall' intera cicloide, che si aggira attorno la sua base, è eguale a cinque metà di un cilindro, che ha per base l'area del circolo genitore, e per altezza l'intera circonferenza del medesimo circolo. Questa proprietà della cicloide fù da me avvertita con il calcolo testè esposto in una occasione, che mi si presentò nell' anno 1827. Ciò basterebbe per il mio intento, ma giacchè ho avuto occasione di parlare della cicloide mi si permetta il mostrare due cose.

Digitized by Google

La prima è in qual maniera facendo uso dell' equazioni (41) si possa arrivare con più speditezza alla formola (49).

La seconda è d'indagare il volume della cicloide che si aggira attorno il suo asse.

E riguardo al primo, le formole (41) ci danno $dx = a(1-\cos u)du = ydu$

e la (43) con la sostituzione diviene

(56) $V = \pi \int y^3 du + C = \pi a^3 \int (1-\cos u)^3 du + C$

Sviluppando le potenze dei coseni, nei coseni degli archi multipli si ottiene

$$(1-\cos u)^3 = \frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos u + \frac{3}{2}\cos 2u - \frac{1}{4}\cos 3u$$

quindi moltiplicando per du, ed integrando

(51) $V = \pi a^3 \int (1-\cos u)^3 du + C$

$$= \pi a^3 \left( \frac{5u}{2} - \frac{15}{4}\operatorname{sen} u + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2u - \frac{1}{3.4}\operatorname{sen} 3u \right) + C$$

La costante si determina che $u = o$, da $V = o$ quindi $C = o$. Per una semicicloide basterà porre $u = \pi$, e la (51) diviene

$$V = \frac{5}{2}\pi^2 a^3$$

resultato del tutto conforme al trovato

Riguardo al secondo. Si prenda per asse delle ascisse il diametro del circolo genitore, che divide per metà l'intera cicloide, il qual diametro chiamasi asse della cicloide, e per asse delle ordinate una retta normale a questo asse, con l'origine delle coordinate nel punto ove l'asse incontra la cicloide; in quest' ipotesi chiamate, $x'$ $y'$, le coordinate di un punto qualunque riferito a questa nuova origine, avremo le seguenti

$x' = 2a - y$, $\quad y' = a\pi - x$, e ponendo $\pi - u = u'$

le formole (41) danno

Digitized by Google

$x'=a(1-\cos u')$, $y'=a(u'+\operatorname{sen} u')$

essendo $u'$ fra i limiti di o, $\pi$, ed il volume corrispondente sarà

$V=\pi\int y'^2dx'+C$

ovvero togliendo gli apici calcoleremo con le formole

(52) $x=a(1-\cos u)$, $y=a(u+\operatorname{sen} u)$

(53) $V=\pi\int y^2dx+C$

Ora le (52) danno

$$(54)\quad \begin{cases} dx=a\operatorname{sen}u\,du \\ y^2=a^2(u^2+\operatorname{sen}^2u+2u\operatorname{sen}u) \end{cases}$$

quai sostituiti nella (53) viene

(55) $V=\pi a^3\int(\operatorname{sen}^3u+2u\operatorname{sen}^2u+u^2\operatorname{sen}u)du+C$

Ma dal calcolo integrale (*)

$$(56)\quad \begin{cases} \int\operatorname{sen}^3u\,du=-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2u\cos u-\frac{2}{3}\cos u \\ \int u\operatorname{sen}^2u\,du=\frac{u^2}{4}-\frac{u\operatorname{sen}2u}{4}-\frac{\cos 2u}{8} \\ \int u^2\operatorname{sen}u\,du=-u^2\cos u+2u\operatorname{sen}u+2\cos u \end{cases}$$

Le costanti da aggiungersi all' integrali delle (56) l'intenderò racchiuse in quello delle (55). Sostituendo dunque tai valori nella (55) sarà

$$V=\pi a^3\left(u^2\left(\frac{1}{2}-\cos u\right)+u(2\operatorname{sen}u-\operatorname{sen}u\cos u)+\frac{\cos u}{3}(4-\operatorname{sen}^2u)-\frac{1}{4}\cos 2u\right)+C$$

La costante si determina che $u=o$ dà $V=o$ quindi

$$C=-\pi a.^3\frac{13}{12}$$

---

(*) Brunacci, calcolo sublime vol. II pag. 299, 303.

Digitized by Google

e facendo nella (57) $u=\pi$ avremo per l'intera cicloide

(58) $V=\pi a^3\left(\frac{3}{2}\pi^2-\frac{8}{3}\right)$

Qui pongo fine a questo breve mio scritto, e spero che i giovani studenti, per il bene dei quali cerco di eseguire qualche travaglio mi saranno grati, se avrò arrecato dei lumi a qualcuno dei punti anche i più elementari del calcolo integrale, e non avranno a sdegno, se nell' esposizione del presente abbia fatto qualche piccola digressione con altre teorie, che sebbene sembrate sieno straniere al propostomi contuttociò presentandomisi l'occasione ho creduto bene di esporle, potendo elle essere di giovamento ai loro studi.

Digitized by Google

Digitized by Google

# ESTRATTO
## DAL GIORNALE ARCADICO
### TOMO LVI.

Digitized by Google

# *Teoria analitica delle superfici generate dal moto di una linea, l' equazioni della quale contengano una funzione arbitraria, supponendo di più, che tali superfici debbano essere circoscritte ad un' altra data superficie qualunque.*

1.° La teoria delle superfici generate dal moto di una linea, le quali nel medesimo tempo debbano essere circoscritte ad una superficie curva qualunque è stata già pienamente trattata da illustri geometri con l'aiuto del calcolo differenziale. Non sarà però inutile di fissarne una elementare teoria indipendente dal detto calcolo, supponendo però, che l'equazioni della generatrice contengano una sola funzione arbitraria quindi esamineremo in particolar modo le superfici coniche, cilindriche, conoidi, e di rivoluzione, facendone di più una completa applicazione alle superfici del secondo grado, le quali sono di maggior utilità; e poichè l'indicata teoria è strettamente unita con l'equazione di un piano tangente una superficie curva in un dato punto: così brevemente premetteremo alcune idee generali sulla medesima.

2.° Sia pertanto

(1) $u = o$, ovvero $f(x', y', z') = o$



Digitized by Google

l'equazione di una superficie curva qualunque, quale risoluta riguarda a, $z'$ dia

(2) $z' = f(x', y')$

Se nel medesimo punto $x' y' z'$ si ha da condurre un piano tangente, la sua equazione sarà della forma

(3) $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$

dove $p, q$ sono nuove funzioni delle $x' y' z'$, quali suppongo determinarsi con metodi indipendenti dal calcolo differenziale, lo che è sempre possibile per ciascuna superficie, specialmente se sia d'equazione algebrica, che è il caso più comune. (*)

L'equazioni poi della retta *normale* alla superficie nel medesimo punto saranno

(4) $x - x' = -p(z - z'), \qquad y - y' = -q(z - z')$

Così se per un caso particolare l'equazione (2) sia una superficie del secondo grado la più generale, avrà essa la forma

(5) $Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex'z' + 2Fy'z' + 2Gx' + 2Hy' + 2Iz' = K$

I valori $p, q$ per il piano tangente sono (**)

---

(*) Vedasi per questo punto la geometria analitica a tre coordinate di Collalto pag. 123, e seg., dove trovasi un tale metodo. Farò qui avvertire una inesattezza dell' autore nel denotare la differenza delle due funzioni

$$f(x, y, z) = 0 \qquad f(x', y', z') = 0$$

la quale asserisce essere

$$f(x - x', \; y - y', \; z - z') = 0$$

mentre deve scriversi

$$f(x, y, z) - f(x', y', z',) = 0$$

(**) Collalto geom. anal. pag. 124.

L'Autore applica il suo metodo all' equazione di una superficie di secondo grado priva dei rettangoli delle coordinate: ma seguitando il medesimo metodo ivi esposto facilmente

Digitized by Google

$$(6)\begin{cases} p = -\dfrac{Ax' + Dy' + Ez' + G}{Cz' + Ex' + Fy' + I} \\ q = -\dfrac{By' + Dx' + Fz' + H}{Cz' + Ex' + Fy' + I} \end{cases}$$

3.° Ciò posto per venire al nostro argomento, rappresentino $v$, $w$ due funzioni delle coordinate $x'y'z'$ ed $m$, $n$ due costanti le quali sieno vincolate dall' equazioni

(7) $v = F(x', y', z') = m$, $w = F(x', y', z') = n$

Ora se le costanti $m$, $n$ sono in generale funzioni l'una dell' altra, cioè

$$m = \varphi(n)$$

sarà senza dubbio

(8) $$v = \varphi(w)$$

l'equazione di una superficie generata dal moto di una linea retta, o curva nella quale l'equazioni della sua generatrice contengono una sola funzione arbitraria $\varphi$. Nel caso adunque, che la superficie dell' equazione (8) debba essere circoscritta alla superficie dell' equazione (1); sarà la linea direttrice della superficie (8), la linea di contatto tra le due superfici. A quest' oggetto rappresentino $P$, $Q$, $R$, tre quantità proporzionali ai coseni degli angoli, che la retta tangente la linea di contatto forma con gli assi delle coordinate, le sue equazioni saranno

(9) $$x - x' = \frac{P}{R}(z - z'),\quad y - y' = \frac{Q}{R}(z - z')$$

---

si arriverà alle formole (6) purchè avvertasi, che nel caso si avranno da considerare l'equazioni

$$yz - y'z' = y(z - z') + z'(y - y')$$
$$xz - x'z' = x(z - z') + z'(x - x')$$

nelle quali anche si avrebbe da sostituire il valore di $z - z'$ preso dall' equazione del piano tangente.



Digitized by Google

E poichè le rette *normale*, e tangente devono essere ad angolo retto, quindi tra le (4) e (9) vi sarà la condizione

(10) $Pp + Qq - R = o$

Chiamando poi, $x\ y\ z$, le coordinate di un punto qualunque della generatrice della superficie (8), le (7) ci daranno

(11) $F(x', y', z') = F(x, y, z)$, $F(x', y', z') = F(x, y, z)$

quindi eliminando le coordinate $x'\ y'\ z'$ tra l'equazioni (1) (10) (11) avremo l'equazione della superficie circoscritta. Tutta la difficoltà consiste nella determinazione delle quantità $P$, $Q$, $R$, le quali sono in generale funzioni delle coordinate $x'\ y'\ z'$. Vedremo però, che nelle principali applicazioni, quali sono per le superfici, coniche, cilindriche, conoidi, e di rivoluzione non essere difficile la determinazione delle $P, Q, R$.(*)

---

(*) Con il calcolo differenziale, le due equazioni

$v = m$, $\quad w = n$

differenziate danno

$$\frac{dv}{dx'}.dx' + \frac{dv}{dy'}.dy' + \frac{dv}{dz'}.dz' = o$$

$$\frac{dw}{dx'}.dx' + \frac{dw}{dy'}.dy' + \frac{dw}{dz'}.dz' = o$$

dalle quali posto

$$P = \frac{dv}{dy'}\cdot\frac{dw}{dz'} - \frac{dv}{dz'}\cdot\frac{dw}{dy'}$$

$$Q = \frac{dv}{dz'}\cdot\frac{dw}{dx'} - \frac{dv}{dx'}\cdot\frac{dw}{dz'}, \quad R = \frac{dv}{dx'}\cdot\frac{dw}{dy'} - \frac{dw}{dx'}\cdot\frac{dv}{dy'}$$

si ricava

$$dx' = \frac{P}{R}dz', \quad dy' = \frac{Q}{R}dz'$$

Riguardo poi a $p$, $q$, essendo l'equazione della superficie $z' = f(x', y')$

Digitized by Google

Riguardo poi al luogo geometrico, dove si trovano i punti di contatto, esso verrà determinato per mezzo dell' equazioni $u=o$ della superficie, e per la condizione (10).

### *Dei coni e cilindri circoscritti ad una superficie curva qualunque.*

4.° Un cono dicesi circoscritto ad una superficie curva, quando viene generato da una retta, che passando per un punto fisso muovesi tangenzialmente alla superficie. Dopo ciò da un punto fisso $x'' y'' z''$ preso nel piano tangente si conduca una retta al punto di contatto $x' y' z'$; avranno l'equazioni di questa la forma; avvertendo alle (7)

---

si ha

$$p = \frac{dz'}{dx'}, \qquad q = \frac{dz'}{dy'}$$

Anche con la semplice analisi si potrebbe fissare nel modo seguente. Le due equazioni

$$F(x', y', z') = m, \qquad F(x', y', z') = n$$

si considerino come rappresentanti due superfici. In questo caso l'equazioni di un supposto piano tangente le medesime in un punto $x' y' z'$ avranno la forma

$$\alpha_1 (x-x') + \beta_1 (y-y') + \gamma_1 (z-z') = o$$

$$\alpha_2 (x-x') + \beta_2 (y-y') + \gamma_2 (z-z') = o$$

quindi ponendo per brevità

$$P = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, \quad Q = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, \quad R = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2$$

coll' eliminazione si ricava

$$x - x' = \frac{P}{R}(z-z'), \quad y - y' = \frac{Q}{R}(z-z')$$

dove $P$, $Q$, $R$ sono nuove funzioni delle coordinate $x' y' z'$ determinate per mezzo dei valori di $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \cdots$

Digitized by Google

$$(12)\quad \frac{x''-x'}{z''-z'}=m,\quad \frac{y''-y'}{z''-z'}=n$$

quindi dalle (11) deduciamo

$$(13)\quad x-x''=\frac{x''-x'}{z''-z'}(z-z''),\ y-y''=\frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z'')$$

Ora nel caso di un cono, la generatrice essendo una linea retta, sarà essa tangente alla superficie nel punto $x'\ y'\ z'$, dunque le $P, Q, R$ potranno esprimersi per

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{P}{R}=\frac{x''-x'}{z''-z'},\quad \frac{Q}{R}=\frac{y''-y'}{z''-z'}, \text{ dalle quali anche} \\ \frac{P}{x''-x'}=\frac{Q}{y''-y'}=\frac{R}{z''-z'}=\frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}} \\ =\frac{1}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}} \end{cases} (*)$$

e la formola (10) diviene

$$(15)\quad 1-\frac{x''-x'}{z''-z'}\cdot p+\frac{y''-y'}{z''-z'}\cdot q=0$$

Eliminando dunque le coordinate $x'$ y' $z'$ tra l'equazioni (1) della superficie, e le (13) (15) si avrà l'equazione del cono circoscritto.

Il luogo geometrico poi dei punti di contatto verrà determinato per la solita equazione (1) e per la condizione (15).

5.° Questa teoria generalissima dei coni circoscritti applichiamola ad una superficie qualunque del

---

(*) In questo caso $P, Q, R$ sono precisamente i coguiti coseni, e quindi $P^2+Q^2+R^2=1$

Digitized by Google

secondo grado, ed espressa per la formola (5). I valori $p, q$ delle (6) sostituiti nella (15) darà

$$(16)(Ax'+Dy'+Ez'+G)(x''-x')+(By'+Dx'+Fz'+H)(y''-y')$$
$$+(Cz'+Ex'+Fy'+I)(z''-z')=o$$

la quale avvertendo all' equazione (5) della superficie, diviene

$$(17)\ (Ax''+Dy''+Ez''+G)x'+(By''+Dx''+Ez''+H)y'$$
$$+(Cz''+Ex''+Fy''+I)z'+Gx''+Hy''+Iz''-K=o$$

Sostituendo di più nella (16) i valori di $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$, presi dalle (13), si trasforma in

$$(18)(Ax'+Dy'+Ez'+G)(x-x')+(By'+Dx'+Fz'+H)(y-y')$$
$$+(Cz'+Ex'+Fy'+I)(z-z')=o$$

ed in forza della (17) si riduce alla

$$(19)\ (Ax+Dy+Ez+G)x'+(By+Dx+Fz+H)y'$$
$$+(Cz+Ex+Fy+I)z'+Gx+Hy+Iz-K=o$$

quindi ponendo per semplicità

$$(20)\begin{cases} L=-\dfrac{Ax+Dy+Ez+G}{Gx+Hy+Iz-K} \\ M=-\dfrac{By+Dx+Fz+H}{Gx+Hy+Iz-K} \\ N=-\dfrac{Cz+Ex+Fy+I}{Gx+Hy+Iz-K} \end{cases}$$

Digitized by Google

$$(21)\quad \begin{cases} L_1 = -\dfrac{Ax''+Dy''+Ez''+G}{Gx''+Hy''+Iz'-K} \\ M_1 = -\dfrac{By''+Dx''+Fz''+H}{Gx''+Hy''+Iz''-K} \\ N_1 = -\dfrac{Cz''+Ex''+Fy''+I}{Gx''+Hy''+Iz''-K} \end{cases}$$

le (17) e (19) divengono

$$(22)\quad \begin{cases} Lx' + My' + Nz' = 1 \\ L_1x'+M_1y'+N_1z' = 1 \end{cases}$$

Inoltre l'equazioni (13) della generatrice possono anche rappresentarsi per

$$\frac{x-x''}{x''-x'} = \frac{y-y''}{y''-y''} = \frac{z-z''}{z'-z'}$$

dalle quali ricaviamo

$$\frac{x-x'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{y''-y'} = \frac{z-z'}{z''-z'}$$

Ma facilmente vedesi potersi avere

$$\frac{(x-x')L}{(x''-x')L} = \frac{(y-y')M}{(y''-y')M} = \frac{(z-z')N}{(z''-z')N}$$

$$\frac{(x-x')L_1}{(x''-x')L_1} = \frac{(y-y')M_1}{(y''-y')M_1} = \frac{(z-z')N_1}{(z'-z')N_1}$$

quindi ancora

$$\frac{(x-x')L+(y-y')M+(z-z')N}{(x''-x')L+(y''-y')M+(z''-z')N} = \frac{(x-x')L_1+(y-y')M_1+(z-z')N_1}{(x''-x')L_1+(y''-y')M_1+(z-z)N_1}$$

la quale a motivo delle (22) diviene

$$(23)\quad \frac{Lx+My+Nz-1}{Lx''+My''+Nz''-1} = \frac{L_1x+M_1y+N_1z-1}{L_1x''+M_1y''+N_1z''-1}$$

Digitized by Google

e rimettendo i valori di $L\ M\ N\ldots$ dopo facile riduzione, ed avvertendo essere

$$Lx''+My''+Nz''-1 = L_1x+M_1y+N_1z-1$$

viene in fine

$$(24)\ \{(Ax''+Dy''+Ez''+G)x+(By''+Dx''+Fz''+H)y$$
$$+(Cz''+Ex''+Fy''+I)z+Gx''+Hy''+Iz''-K\}^2=$$
$$(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Iz-K)\times$$
$$(Ax''^2+By''^2+Cz''^2+2Dx''y''+2Ex''z''+2Fy''z''+2Gx''$$
$$+2Hy''+2Iz''-K)$$

Tal' è l'equazione la più generale, che si possa avere per una superficie conica circoscritta ad una superficie del secondo grado: e poichè, ella è di due dimensioni riguardo alle variabili $x$ y $z$ sarà anche una superficie conica di secondo grado.

Riguardo poi al luogo geometrico dei punti di contatto è facile il vedere risultare dall' unione dell' equazioni (5) (17) una linea di secondo grado, e per conseguenza una linea piana. Quest' ultima conseguenza si può dedurre dalla stessa equazione (24) del cono circoscritto, purchè in essa pongasi $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, lo che riduce la detta alla semplice

$$(25)\ (Ax''+Dy''+Ez''+G)x'+(By''+Dx''+Fz''+H)y'$$
$$+(Cz''+Ex''+Fy''+I)z''+Gx''+Hy''+Iz''-K=o$$

la quale essendo evidentemente per tutti i punti $x'y'z'$ l'equazione generale di un piano, mostra essere la curva di contatto, una curva piana.

6.° Stabilita l'equazione (24) facilmente si discende ai diversi casi particolari; così se si vuole un cono circoscritto ad un ellissoide di semiassi $a$, $b$, $c$ è rappresentata per l'equazione

Digitized by Google

(26) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1$

la (24) si ridurrà alla semplice

(27) $\left(\frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} + \frac{z''z}{c^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} - 1\right) \times \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$

Supponendo di più, che ellissoide si riduca ad una sfera di raggio $a=b=c$, e che l'asse del cono coincida con l'asse delle $z''$, dovrà essere $x''=o$, $y''=o$ e la (27) diviene

$$(z''z - a^2)^2 = (x^2+y^2+z^2-a^2)\ (z''^2-a^2)$$

che si può mettere anche sotto la forma

$$x^2+y^2 = \frac{a^2}{z''^2-a^2}\ (z-z'')^2$$

Equazione al cono retto circolare.

Se nella medesima (27) si eseguiscano i sviluppi indicati potrà essa rappresentarsi per

$$\left(\frac{xy''-yx''}{ab}\right)^2 + \left(\frac{xz''-zx''}{ac}\right)^2 + \left(\frac{yz''-zy''}{bc}\right)^2 = \left(\frac{x-x''}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y''}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-z''}{c}\right)^2$$

e nel caso di una sfera

$$(xy''-yx'')^2+(xz''-zx'')^2+(yz''-zy'')^2 = a^2\left\{(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2\right\}$$

formola di facile verificazione, mentre estratta da essa la sua radice quadrata, e divisa per 2 esprime l'area del triangolo formato dalle due rette che partendo dal centro della sfera si portano ai punti $x\ y\ z$, $x''y''z''$

In un modo del tutto simile si vedrà, cosa divenga la formola (24) per l'iperboloidi da una falda, e da due falde rappresentanti per l'equazioni

Digitized by Google

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}-\dfrac{z'^2}{c^2}=1 \\ \dfrac{z'^2}{c^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}-\dfrac{x'^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

Lo stesso dicasi per i paraboloidi ellittico, ed iperbolico dell' equazioni

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=\dfrac{2z'}{c} \\ \dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}=\dfrac{2z'}{c} \end{cases}$$

7.° La formola (25), che esprime l'equazione del piano della curva di contatto di una superficie conica circoscritta ad una secondo grado apre la via a risolvere molti problemi. Non farò presentemente, che indicare il metodo generale per arrivarvi.

La medesima (25), mutando $x' y' z'$ in $x y z$ si metta sotto la forma

(30) $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = o$

dove $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sono espresse per le coordinate $x''y''z''$ del vertice. Può darsi contuttociò, che invece del vertice del cono sia dato il piano della curva di contatto. In quest' ipotesi per determinare il vertice si avranno l'equazioni

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{Ax''+Dy''+Ez''+G}{Cz''+Ex''+Fy''+I} \\ \dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{By''+Dx''+Fz''+H}{Cz''+Ex''+Fy''+I} \\ \dfrac{\delta}{\gamma}=\dfrac{Gx''+Hy''+Iz''-K}{Cz''+Ex''+Fy''+I} \end{cases}$$

Digitized by Google

le quali risolute riguardo alle $x''y''z''$ ci somministreranno le coordinate del vertice della superficie conica. I valori poi di $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\gamma}$ possono essere dati da una sola relazione generale

$$(32)\ f\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\gamma}\right) = o$$

od anche da due relazioni

$$(33)\ f\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\gamma}\right) = o,\ \varphi\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\gamma}\right) = o$$

Nel primo caso la sostituzione dei valori nella (32) darà il luogo geometrico dei vertici della superficie conica circoscritta, della quale il piano della curva di contatto è soggetto ad una data condizione.

Nel secondo caso la sostituzione dei valori nella (33) produrrà l'equazioni di due superfici, e la loro intersecazione è il luogo geometrico dei vertici della superficie conica, della quale il piano della curva di contatto è soggetto alle due date condizioni. Questi risultati si possono enunciare nel modo seguente (*)

I.° Se il piano della curva di contatto si muove in modo, che i coefficienti della sua equazione sodisfino ad una data condizione, il vertice della superficie conica percorre una superficie del grado medesimo di questa condizione.

II.° Se il piano della curva di contatto si muove in modo, che i coefficienti della sua equazione sodisfino a due condizioni, il vertice della superficie conica percorre una curva, che è l'intersezione di due superfici del grado medesimo dell' equazioni di condizione.

---

(*) Giorgini super. del sec. grado pag. 41.

Digitized by Google

Passiamo alla considerazione dei cilindri circoscritti.

8.° Un cilindro dicesi circoscritto ad una superficie curva, quando venga generato dal moto di una retta che rimanendo parallela a sè stessa è sempre tangente alla data superficie.

Dopo ciò è chiaro, che dovendo la generatrice del cilindro passare per il punto di contatto $x'\,y'\,z'$ le sue equazioni generali saranno

(34) $\quad x-x'=m\,(z-z') \qquad y-y'=n\,(z-z')$

dove $m$ $n$ sono quantità costanti, e rappresentano precisamente le tangenti trigonometriche degli angoli, che le projezioni delle medesime (34) nei piani $xz$, $yz$ formano con l'asse delle $z$. In questo caso dalle formole (9) deduciamo

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{P}{R}=m, \quad \dfrac{Q}{R}=n, \quad \text{ed anche} \\ \dfrac{P}{m}=\dfrac{Q}{n}=R=\dfrac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}} \end{cases}$$

e la condizione (10) diviene

(36) $\quad 1-mp-nq=o$

Eliminando pertanto le coordinate $x'$ $y'$ $z'$ fra l'equazioni (1) della superficie, e (34) (36) avremo l'equazione del cilindro circoscritto; dove è d'avvertirsi, che le (34) sono comprese nelle (11) generali.

Le formole in fine (1) e (36) danno la determinazione per il luogo geometrico dei punti di contatto.

9.° Se anche qui l'esposta teoria si applichi alle superfici del secondo grado racchiuse nella formola generale (5) i valori $p$ $q$ dati dalla (6) sostituiti nella (36) ci porgono

(37) $(Am+Dn+E)x'+(Bn+Dm+F)y'+(C+Em+Fn)z'$

$$+Gm+Hn+I=o$$

Digitized by Google

ovvero ordinando riguardo ad $m$ $n$ viene

$$(38)\quad (Ax'+Dy'+Ez'+G)m+(By'+Dx'+Fz'+H)n +Cz'+Ex'+Fy'+I=o$$

L'equazioni poi (34) della generatrice ci danno

$$(39)\quad \frac{x-x'}{m}=\frac{y-y'}{n}=z-z'$$

Quindi eliminando $m$, $n$ ed avvertendo all'equazione (5) della superficie, la medesima (38) si trasforma nell' altra

$$(40)\quad (Ax+Dy+Ez+G)x'+(By+Dx+Fz+H)y' +(Cz+Ex+Fy+I)z'+Gx+Hy+Iz-K=o$$

e ponendo al solito

$$(41)\quad \begin{cases} L=-\dfrac{Ax+Dy+Ez+G}{Gx+Hy+Iz-K} \\ M=-\dfrac{By+Dx+Fz+H}{Gx+Hy+Iz-K} \\ N=-\dfrac{Cz+Ex+Fy+I}{Gx+Hy+Iz-K} \end{cases}$$

$$(42)\quad \begin{cases} L_1=-\dfrac{Am+Dn+E}{Gm+Hn+I} \\ M_1=-\dfrac{Bn+Dm+F}{Gm+Hn+I} \\ N_1=-\dfrac{C+Em+Fn}{Gm+Hn+I} \end{cases}$$

le (37) e (40) diverranno

$$(43)\quad \begin{cases} Lx+My+Nz=1 \\ L_1x+M_1y+N_1z=1 \end{cases}$$

Digitized by Google

alle quali và unita la (39); ed operando come per il cono circoscritto si deduce

$$\frac{(x-x')L+(y-y')M+(z-z')N}{mL+nM+N}=\frac{(x-x')L_1+(y-y')M_1+(z-z')N_1}{mL_1+nM_1+N_1}$$

ed avuto riguardo alle (43) si riduce alla semplice

$$(44)\quad \frac{Lx+My+Nz-1}{mL+nM+N}=\frac{L_1x+M_1y+N_1z-1}{mL_1+nM_1+N_1}$$

nella quale sostituendo di nuovo i valori di $L\ M\ N\ldots$ ed avvertendo essere

$$mL+nM+N=L_1x+M_1y+N_1z-1$$

dopo facile riduzione si hà

$$(45)\quad \{(Am+Dn+E)x+(Bn+Dm+F)y+(C+Em+Fn)z+Gm+Hn+I\}^2=$$
$$(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Iz-K)\times$$
$$(Am^2+Bn^2+C+2Dmn+2Em+2Fn)$$

Tal' è l'equazione del cilindro circoscritto ad una superficie qualunque di secondo grado, e poichè questa è di due dimensioni riguardo alle variabili $x\ y\ z$ sarà un cilindro di secondo grado.

Il luogo geometrico poi dei punti di contatto è una curva piana, e di secondo grado come scorgersi dall' unione dell' equazioni (5) e (37).

9.° Venendo al caso particolare di un ellissoide rappresentata per l'equazione (26) di sopra stabilita, la (45) si trasforma in

$$(46)\quad \left(\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{z}{c^2}\right)^2=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

Ora se si chiami $r$ un raggio vettore, che dal centro dell' ellissoide si conduce ad un punto della medesima, ma parallelamente alla generatrice del cilindro, facilmente si vede essere

Digitized by Google

$$(47) \qquad r^2 = \frac{1 + m^2 + n^2}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

e la (46) diviene

$$(48) \qquad \left(\frac{mx}{a^2} + \frac{n\gamma}{b^2} + \frac{z}{c^2}\right) \cdot \frac{r^2}{1+m^2+n^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

Nel medesimo modo può applicarsi la (45) per gli iperboloidi, e paraboloidi espressi per le formole (28) (29) Queste sono le applicazioni più importanti delle generali teorie delle superfici coniche, e cilindriche circoscritte a quelle del secondo grado; ma prima di lasciare quest' argomento non sarà inutile di esporre brevemente un particolare metodo, che esiste per le superfici del secondo grado, onde un cono, ed anche un cilindro sia loro circoscritto.

10.° Sia $V$ la lunghezza di una retta, la quale abbia nelle sue estremità le coordinate $x'y'z'$, $x''y''z''$, e sieno $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gli angoli, che questa retta forma con l'assi delle coordinate; potremo stabilire

$$(49) \quad x' = V\cos\alpha + x'', \quad y' = V\cos\beta + y'', \quad z' = V\cos\gamma + z''$$

sostituendo tai valori nell' equazione (5) delle superfici del secondo grado, si arriva ad un risultato della forma

$$(50) \qquad A_1 V^2 + B_1 V + C_1 = 0$$

Onde questa retta divenga tangente nel punto $x'y'z'$ della superficie, dovranno essere eguali le radici dell' equazione (50); dunque la condizione

$$(51) \qquad B_1^2 = 4 A_1 C_1$$

nella quale introdotto

$$(52) \qquad m = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad n = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

la medesima (51) fatta la sostituzione dei valori di $A_1$ $B_1$ $C_1$ ci darà

Digitized by Google

$$(53)\left\{(Am+Dn+E)x''+(Bn+Dm+F)y''+(C+Em+Fn)z''+Gm+Hn+I\right\}^2=$$
$$(Ax''^2+By''^2+Cz''^2+2Dx''y''+2Ex''z''+2Fy''z''+2Gx''+2Hy''+2Iz''-K)\times$$
$$(Am^2+Bn^2+C+2Dmn+2Em+2Fn)$$

Ed osservo di passaggio, che se nella formola (53) si considerino le coordinate $x''y''z''$ non già di un punto fisso, ma di un punto qualunque della generatrice, rappresenterà essa l'equazione di un cilindro circoscritto ad una superficie del grado. Ognuno infatti conosce, che allora un cono degenera in cilindro, quando la sua generatrice muovesi a se stessa parallela.

Si sostituisca ora nella (53) in luogo di $m$, $n$

$$(54).\quad m=\frac{x-x''}{z-z''},\quad n=\frac{y-y''}{z-z''}$$

vedremo, che togliendo dalla medesima il comune denominatore $(z-z'')^2$; il primo membro della (53) potrà rappresentarsi per semplicità con

$$\left\{M'x+N'y+P'z+Gx''+Hy''+Iz''-K-f(x'',y'',z'')\right\}^2(*).$$

Chiamando $R'$ la collezione di tutti questi termini eccettuato l'ultimo, sarà

$$\left\{R'-f(x'',y'',z'')\right\}^2$$

Riguardo al secondo membro della (53) il secondo fattore diviene

$$f(x,y,z)+f(x'',y'',z'')-2R'$$

quindi la (53) si trasforma in

---

(*) Seguitando a rappresentare per commodità l'equazione (5) delle superfici del secondo grado con l'espressione $f(x',y',z')=0$



Digitized by Google

$$\left\{R'-f(x'',y'',z'')\right\}^2=\left\{f(x,y,z)+f(x'',y'',z'')-2R\right\}f(x'',y''z'')$$

e fatta la riduzione

(55). $$R'^2=f(x,y,z).\ f(x'',y'',z'')$$

dove si scorge chiaramente essere verificata la formola (24) del cono circoscritto alle superfici del secondo grado.

11.° Il presente metodo ci abilita a riconoscere una proprietà del piano della curva di contatto. Sieno $V'$ $V''$ le radici dell' equazione (50), sarà

(56) $$\begin{cases} V'=-\dfrac{B_1+\sqrt{B_1^2-4A_1C_1}}{2A_1} \\ V''=-\dfrac{B_1-\sqrt{B_1^2-4A_1C_1}}{2A_1} \end{cases}$$

La condizione poi (51) del contatto ci dà

$$A_1=\frac{B_1^2}{4C_1}$$

la quale introdotta nella (56) porge la distanza $V_1$ del vertice $x''$ $y''$ $z''$ dal piano della curva di contatto, cioè

(57). $$V_1=-\frac{B_1}{2A_1}=-\frac{2C_1}{B_1}$$

Inoltre dalle medesime (56) si hà

$$\frac{V'}{V'}=\frac{-B_1-\sqrt{B_1^2-4A_1C_1}}{-B_1+\sqrt{B_1^2-4A_1C_1}}$$

dove moltiplicando numeratore, e denominatore per il medesimo denominatore si arriva alla formola

$$\frac{V''}{V'}=\frac{-2A_1C_1}{B_1(B_1-\sqrt{B_1^2-4A_1C_1})-2A_1C_1}$$

e sostituita la distanza $V_1$ della (57) viene

(58). $$\frac{V''}{V'}=\frac{-V_1}{V_1-2V'}$$

Digitized by Google

ovvero

$V'V_1 - V''V' = V'V' - V'V_1$ quindi

(59). $$\frac{V'}{V'} = \frac{V'' - V_1}{V_1 - V'}$$

Dunque il piano della curva di contatto taglia qualunque corda condotta dal vertice in due segmenti proporzionali alle distanze del vertice ai punti ove la medesima corda incontra la superficie.

*Delle superfici conoidi circoscritte ad una superficie curva qualunque.*

12.° Come già è noto una superficie conoide vien generata da una retta mobile obligata a passare costantemente per una data retta, che dicesi, *Asse della superficie* rimanendo perpendicolare a quest' asse, ed anche in altri termini; la generazione di una superficie conoide si opera da una retta mobile obligata ad essere costantemente parallela ad un piano dato; ed a soccorrere lungo una retta fissa di posizione, ed una data linea.

L'equazione di questa superficie si trova della massima semplicità, sopponendo, che l'asse fisso sia l'asse delle $z$; infatti in quest' ipotesi l'equazioni della generatrice saranno

(60). $$z' = m \qquad \frac{x'}{y'} = n$$

le quali sono racchiuse nelle (7) generali; d'onde la sua equazione

(61). $$z' = \varphi\left(\frac{x'}{y'}\right)$$

Si dice pertanto una superficie conoide circoscritta ad una superficie curva, quando vien generata da

Digitized by Google

una retta, che passando per un asse fisso, e rimanendo perpendicolare a quest' asse, muovesi tangenzialmente alla data superficie.

Dopo ciò è evidente, che chiamando $x\ y\ z$ le coordinate di un punto qualunque della generatrice, ed $x'\ y'\ z'$ quelle del punto di contatto; le formole (11) unite alle (60) ci danno

$$(62)\ .\qquad \frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}\qquad z=z'$$

le quali possono mettersi sotto la forma

$$(63)\qquad x-x'=\frac{x'}{y'}(y-y'),\qquad z=z'$$

quindi dalle (9) si deduce

$$(64)\begin{cases}\dfrac{P}{Q}=\dfrac{x'}{y'}, & R=o; \text{ ed anche}\\ \dfrac{P}{x'}=\dfrac{Q}{y'}=\dfrac{\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, & R=o\end{cases}$$

e la condizione (10) diviene

$$(65)\ px'+qy'=o$$

Eliminando dunque le coordinate $x'\ y'\ z'$ tra l'equazioni (1) della superficie, e le (62) (65) risulterà l'equazione della superficie conoide circoscritta. Le medesime equazioni infine (1) e (65) danno la determinazione per il luogo geometrico de' punti di contatto.

13.° Così se per un caso particolare domandasi l'equazione di una superficie conoide circoscritta ad un ellissoide rappresentata dall' equazione

$$(66)\ .\ \frac{(x'-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y'-y_1)^2}{b^2}+\frac{(z'-z_1)^2}{c^2}=1$$

Essendo $x_1\ y_1\ z_1$ le coordinate del centro. In questo caso dalle (6) ricaviamo

Digitized by Google

(67) . $p = -\frac{c^2(x'-x_1)}{a^2(z'-z_1)}$, $q = -\frac{c^2(y'-y_1)}{b^2(z'-z_1)}$

Sostituendo tai valori nella (65) ella diviene

(68) . $\frac{x'(x'-x_1)}{a^2} + \frac{y'(y'-y_1)}{b^2} = o$

ed anche in forza della (62)

$\frac{x}{a^2}(x'-x_1) + \frac{y}{b^2}(y'-y_1) = o$

ovvero

(69) . $\frac{x'-x_1}{\left(\frac{y}{b^2}\right)} = \frac{y'-y_1}{\left(\frac{-x}{a^2}\right)} = \frac{y(x'-x_1)-x(y'-y_1)}{\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{y_1x-x_1y}{\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}}$

Di più dalla medesima (69)

(70) $\frac{x'-x_1}{\left(\frac{y}{b^2}\right)} \frac{y'-y_1}{\left(\frac{-x}{a^2}\right)} = \pm\frac{\sqrt{\frac{(x'-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y'-y_1)^2}{b^2}}}{\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}}} = \pm ab\frac{\sqrt{1-\frac{(z'-z_1)^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$

$= \pm ab\frac{\sqrt{1-\frac{(z-z_1)^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$

Paragonando dunque le ultime eguaglianze delle (69) e (70) si ottiene

(71) . $\frac{(y_1x-x_1y)^2}{a^2b^2} = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{(z-z_1)^2}{c^2}\right)$

Tal' è l'equazione della superficie conoide circoscritta all' ellissoide espressa per la formola (66) dove faccio avvertire, che per semplificare il calcolo abbiamo adoprato la (66) invece dell' equazione generale (5); purchè la medesima fosse dotata di centro; nel qual caso trasformando le coordinate si può ri-

Digitized by Google

durre ad essere $D=o$, $E=o$, $F=o$ per lo chè si avrebbe

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Gx'+2Hy'+2Iz'=K$$

la quale messa sotto la forma

$$A\left(x'+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(y'+\frac{H}{B}\right)^2+C\left(z'+\frac{I}{C}\right)^2=K+\frac{G^2}{A}+\frac{H^2}{B}+\frac{I^2}{C}$$

e confrontata con la (66) si deduce subito qual sieno le coordinate $x_1 y_1 z_1$ del suo centro, ed i semiassi $a.b.c$.

## *Delle superfici di rivoluzione circoscritte ad una superficie curva qualunque.*

14.° Per avere l'equazioni di tutta semplicità noi supporremo, che l'asse di rivoluzione della superficie sia il medesimo asse delle $z$; lo chè verificherà le due equazioni

(72) . $x'^2+y'^2=m$, $z'=n$

e quindi

(73) . $x'^2+y'^2=\phi(z')$

Se questa superficie ha da passare per una data direttrice; allora chiamando $x\ y\ z$ le coordinate di un punto qualunque della generatrice si avrà

(74) . $x'^2+y'^2=x^2+y^2$, $z=z'$

Ora la prima di queste si risolve nell' altra

(75) . $$x-x'=-\frac{(y+y')}{x+x'}(y-y')$$

e nel caso della circoscrizione dovrà farsi nel coefficiente $\frac{y+y'}{x+x'}$, $x=x'$ $y=y'$; d'onde il confronto delle (9) con la (75) ci ottiene

Digitized by Google

$$(76)\quad \begin{cases} \frac{P}{Q} = -\frac{y'}{x'}, \quad R = o, \text{ ed anche} \\ \frac{p}{y'} = -\frac{Q}{x'} = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad R = o \end{cases}$$

e la condizione (10) diviene

$$(77)\ .\quad qx' - py' = o$$

Eliminando dunque le coordinate $x'\ y'\ z'$ tra la solita equazione (1), e le (74) (77) si avrà l'equazione della superficie di rivoluzione circoscritta ad una superficie curva qualunque. Ognun vede poi, che il luogo geometrico dei punti di contatto è compreso nell' equazioni (1) e (77).

15.° Così se la superficie (1) sia un ellissoide di rivoluzione attorno l'asse delle $z$, i due assi $2a$, $2b$ eguali, e l'equazione sarà

$$(78)\ .\quad \frac{(x'-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y'-y_1)^2}{a^2} + \frac{(z'-z_1)^2}{c^2} = 1$$

e dalle formole (6) si ricava

$$(79)\ .\quad p = -\frac{c^2(x'-x_1)}{a^2(z'-z_1)} \qquad q = -\frac{c^2(y'-y_1)}{a^2(z'-z_1)}$$

e la (77) diviene

$$(80)\ .\quad y'x_1 - x'y_1 = o$$

dalla quale avvertendo alla (74) si ottiene

$$(81)\ .\quad \frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = \pm\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \pm\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

Di più le medesime (81) diminuite dell'unità ci porgono

$$(82).\ \frac{x'-x_1}{x_1} = \frac{y'-y_1}{y_1} = -1 \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \pm\frac{\sqrt{(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$= \pm\frac{a}{c}\cdot\frac{\sqrt{c^2-(z-z_1)^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

d'onde viene

Digitized by Google

$$(83)\ .\ \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\frac{a^2}{c^2}\left(c^2-(z-z_1)^2\right)$$

ovvero sviluppando il quadrato del primo membro e trasponendone il doppio prodotto dei termini semplici, ed elevando di nuovo al quadrato verrà

$$(84).\left\{x^2+y^2-\frac{a^2}{c^2}\left(c^2-(z-z_1)^2\right)+x_1^2+y_1^2\right\}^2=4(x_1^2+y_1^2)(x^2+y^2)$$

Tal' è l'equazione di una superficie di rivoluzione circoscritta ad un ellissoide parimenti di rivoluzione, attorno l'asse delle $z$, e rappresentata dalla formola (78), dove ognun conosce essere $x_1\ y_1\ z_1$ le coordinate del suo centro.

Basti il presente saggio sulla teoria delle superfici curve generate dal moto di una linea, e soggette ad essere circoscritte ad una superficie curva qualunque. Non può questa completamente trattarsi senza l'aiuto del calcolo differenziale. Servirà con tutto ciò per avanzare sempre più lo studio della geometria analitica, che è del massimo interesse nell' introduzione al calcolo sublime.

B. Tortolini.

ARTICOLO ESTRATTO
DAL GIORNALE ARCADICO
NEL TOMO LVII.

Digitized by Google

# RICERCHE SOPRA ALCUNI PUNTI DI GEOMETRIA ANALITICA

## *Sulla trasformazione delle coordinate poste nello spazio, passando da un sistema di assi obliqui ad un altro della stessa specie.*

1.° Chiamando $(x, y, z)$ le coordinate di un punto qualunque posto nello spazio, e riferito a tre assi ortogonali, ed $(x_1 y_1 z_1)$ le coordinate del medesimo punto riferito a tre assi obliqui aventi la medesima origine con i primitivi, avremo come è cognito dalla teoria delle projezioni ortogonali

$$(1)\quad \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 \\ y = \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1 \\ z = \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1 \end{cases}$$

dove le quantità $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$, $\beta\ \beta'\ \beta''$, $\gamma\gamma'\ \gamma''$ sono i coseni degli angoli, che gli assi delle $x_1\ y_1\ z_1$ obliqui formano con quelli delle $x$, $y$, $z$, rettangolari; quindi si verificherà

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \quad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases}$$



Digitized by Google

Gli angoli poi che formano fra loro gli assi obliqui cioè

$$x_1 y_1 = U, \qquad x_1 z_1 = U, \qquad y_1 z_1 = U'$$

$$(3)\begin{cases} \cos U = \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' \\ \cos U' = \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' \\ \cos U'' = \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' \end{cases}$$

2.° Imaginando ora condotti per la medesima origine tre nuovi assi obliqui, che noi chiameremo delle $\xi$, $\eta$, $\zeta$, otterremo similmente le relazioni con le rettangolari $x$, $y$, $z$, cioè

$$(4)\begin{cases} x = \alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta \\ y = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ z = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta \end{cases}$$

E per le stesse ragioni di sopra si hanno di condizioni

$$(5)\begin{cases} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \qquad \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 \end{cases}$$

e ponendo gli angoli

$$\xi\,\eta = V, \qquad \xi\,\zeta = V', \qquad \eta\,\zeta = V''$$

viene

$$(6)\begin{cases} \cos V = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \\ \cos V' = \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 \\ \cos V'' = \beta_0\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 \end{cases}$$

quindi paragonando fra di loro le formule (1) e (4) abbiamo

Digitized by Google

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = \alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta \\ \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta \end{cases}$$

d'onde per l'eliminazione deduciamo

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + y(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + z(\beta\gamma' - \gamma\beta')}{\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \alpha'(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + \alpha''(\beta\gamma' - \gamma\beta')} \\ y_1 = \dfrac{x(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + y(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + z(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')}{\beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \beta'(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + \beta''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')} \\ z_1 = \dfrac{x(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + y(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') + z(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{\gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + \gamma'(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') + \gamma''(\alpha\beta - \beta\alpha')} \end{cases}$$

nelle quali però in luogo delle $x$, $y$, $z$ devono sostituirsi i valori presi dalle formule (4) in funzione di $\xi$, $\eta$, $\zeta$; nel qual caso si passerà da un sistema di assi obliqui ad un altro della stessa specie, e si otterrà un risultato della forma seguente

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = m_0 \xi + n_0 \eta + p_0 \zeta \\ y_1 = m_1 \xi + n_1 \eta + p_1 \zeta \\ z_1 = m_2 \xi + n_2 \eta + p_2 \zeta \end{cases}$$

3.° Giova pertanto indagare cosa rappresentino i coefficienti ($m_0$ $n_0$ $p_0$ . . .) premettendo la soluzione del seguente

Problema. *Essendo dati gli angoli che formano tre rette condotte dall'origine con gli assi ortogonali, cercasi l'angolo, che forma una di queste con il piano delle altre due.*

A far ciò osservo, che imaginando una retta perpendicolare al piano delle due rette avremo evidente-

Digitized by Google

mente il coseno dell' angolo della perpendicolare con la terza retta eguale al seno del richiesto angolo.

Chiamati pertanto $\alpha\ \beta\ \gamma$, $\alpha'\ \beta'\ \gamma$, $\alpha''\ \beta''\ \gamma''$ i coseni degli angoli che le tre rette formano con gli assi coordinate, $U$ l'angolo compreso dalle prime due rette, e $\lambda$, $\mu$, $\nu$, gli angoli, che la retta perpendicolare al piano delle prime due rette forma con i medesimi assi, ed $\varepsilon$ il richiesto angolo si otterrà

$$(10)\quad sen\ \varepsilon = \alpha''\ cos\ \lambda + \beta''\ cos\ \mu + \gamma''\ cos\ \nu$$

le condizioni di perpendicolarità sono

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha\ cos\ \lambda + \beta\ cos\ \mu + \gamma\ cos\ \nu = 0 \\ \alpha'\ cos\ \lambda + \beta'\ cos\ \mu + \gamma'\ cos\ \nu = 0 \end{cases}$$

dalle quali per via dell' eliminazione deduciamo

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{cos\ \lambda}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \dfrac{cos\ \mu}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \dfrac{cos\ \nu}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \\ = \pm \dfrac{\sqrt{cos^2\lambda + cos^2\mu + cos^2\nu}}{\sqrt{(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}} \end{cases}$$

e poichè

$$(13)\quad cos\ U = \alpha\ \alpha' + \beta\ \beta' + \gamma\ \gamma'$$

quindi dalle (12) si ha

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{cos\lambda}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \dfrac{cos\ \mu}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \dfrac{cos\ \nu}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \\ = \pm \dfrac{1}{sen\ U} \end{cases}$$

Se questa retta è prolungato in un certo senso il doppio segno si ridurrà al primo, ed avremo

Digitized by Google

$$(15)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\operatorname{sen} U}, \qquad \cos\mu = \dfrac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma}{\operatorname{sen} U} \\ \cos\nu = \dfrac{\alpha\beta' - p\alpha'}{\operatorname{sen} U} \end{cases}$$

e per conseguenza la (16) ci porge

$$(16)\quad \operatorname{sen} s = \frac{\alpha''(\beta\gamma' - \gamma\beta') + \beta''(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + \gamma''(\alpha\beta' - \beta\alpha')}{\operatorname{sen} U}$$

Espressione del tutto simmetrica riguardo alle $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots$ e ci vien caratterizata semplicemente dall' angolo $U$, che formano le due rette, il piano delle quali forma l'angolo $s$ con la terza.

4.° Risoluta una tal questione è facile il vedere, che i coefficienti $m_o\ n_o\ p_o \ldots$ di $\xi$, $\eta$, $\zeta$ nelle (9); quali provengono dalla sostituzione di $x\ y\ z$ prese dalle (4) nell' equazioni (9), essere in forza della (16).

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{m_o}{\operatorname{sen} a_o} = \dfrac{n_o}{\operatorname{sen} b_o} = \dfrac{p_o}{\operatorname{sen} c_o} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} e_o} \\ \dfrac{m_1}{\operatorname{sen} a_1} = \dfrac{n_1}{\operatorname{sen} b_1} = \dfrac{p_1}{\operatorname{sen} c_1} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} e_1} \\ \dfrac{m_2}{\operatorname{sen} a_2} = \dfrac{n_2}{\operatorname{sen} b_2} = \dfrac{p_2}{\operatorname{sen} c_2} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} e_2} \end{cases}$$

nelle quali gli angoli $a_o\ b_o\ c_o, \ldots$ sono gli angoli, che gli assi $\xi$, $\eta$, $\zeta$, formano con i piani $y_1\ z_1$ $x_1\ z_1$ $x_1\ y_1$ ed $e_o\ e_1\ e_2$ gli angoli degli assi $x_1\ y_1\ z_1$ con i piani $y_1\ z_1$ $x_1\ z_1$ $x_1\ y_1$

Sostituiti adunque i valori delle (17) nelle (9) otterremo le formule semplicissime

Digitized by Google

$$(18)\begin{cases} x_1 \operatorname{sen} e_0 = \xi \operatorname{sen} a_0 + \eta \operatorname{sen} b_0 + \zeta \operatorname{sen} c_0 \\ y_1 \operatorname{sen} e_1 = \xi \operatorname{sen} a_1 + \eta \operatorname{sen} b_1 + \zeta \operatorname{sen} c_1 \\ z_1 \operatorname{sen} e_2 = \xi \operatorname{sen} a_2 + \eta \operatorname{sen} b_2 + \zeta \operatorname{sen} c_2 \end{cases}$$

Od anche togliendo gli apici dalle $x$, $y$, $z$, per semplicità, ed adottando la notazione di alcuni col mettere in evidenza gli angoli $a_0$ $b_0$ $c_0$, . . . si avrà

$$(19)\begin{cases} x \operatorname{sen}(x,yz) = \xi \operatorname{sen}(\xi,yz) + \eta \operatorname{sen}(\eta,yz) + \zeta \operatorname{sen}(\zeta,yz) \\ y \operatorname{sen}(y,xz) = \xi \operatorname{sen}(\xi,xz) + \eta \operatorname{sen}(\eta,xz) + \zeta \operatorname{sen}(\zeta,xz) \\ z \operatorname{sen}(z,xy) = \xi \operatorname{sen}(\xi,xy) + \eta \operatorname{sen}(\eta,xy) + \zeta \operatorname{sen}(\zeta,xy) \end{cases}$$

Queste formule si sarebbero potute ottenere dalla semplice considerazione delle projezioni oblique, (*) ma abbiamo voluto ~~dedurle~~ dedurle in questo modo, che si ha somministrato un utile esercizio della geometria analitica. Français al quale debbonsi queste formule vi pervenne con metodi analogi all' esposto; ma molto più prolissi (**). Nell' ipotesi che gli assi $x_1$ $y_1$ $z_1$ fossero rettangolari si hà

$$\operatorname{sen} e_0 = 1 \qquad \operatorname{sen} e_1 = 1 \qquad \operatorname{sen} e_2 = 1$$

ed i coefficienti delle formule (18) riduconsi al significato di quelli delle. (1) Molte altre ricerche utili, e rimarchevoli possono dedursi dalla trasformazione delle coordinate; ma sono queste estranee allo stabilito scopo.

---

(*) Puissant prop. de geom. pag. 272.
(**) XIV Cahier journal Politec.

Digitized by Google

*Proprietà generali della curvatura di una superficie qualunque dedotte dalla considerazione del piano tangente.*

1.° Consideriamo una superficie curva qualunque riferita a tre assi ortogonali, delle $x$, $y$, $z$, e rappresentata per l'equazione generale

(1) $u = o$, ovvero $f(x, y, z) = o$

la quale risoluta riguardo a $z$ dia

(2) $z = f(x, y)$

Se in questo medesimo punto preso generalmente sulla superficie si concepisca condotto un piano tangente la sua equazione sarà espressa per

(3) . $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$

dove $X$, $Y$, $Z$, sono le coordinate di un punto qualunque del medesimo piano $p$, $q$ sono nuove funzioni delle $x$, $y$, $z$ quali suppongo determinarsi indipendentemente dal calcolo differenziale. S'imagini ora per il medesimo punto di contatto, condotto un piano normale, produrrà esso una data sezione, che noi chiameremo *sezione normale*, e l'intersezione di ciascun piano normale con il piano tangente darà origine ad altrettante rette toccanti la superficie ed esistenti nel medesimo piano tangente.

2.° Considerando due qualunque di queste rette prodotte dall' intersezioni di due piani normali con il piano tangente, le loro equazioni potranno esprimersi per

Digitized by Google

(4) $X - x = m\,(Z-z)\,, \quad Y - y = n\,(Z-z)$

(5) $X' - x = m'\,(Z'-z) \quad Y' - y = n'\,(Z'-z)$

e ponendo per brevità

(6) . $\frac{n}{m} = \varphi\,, \quad \frac{n'}{m'} = \downarrow$

l'equazioni (4) e (5) saranno comprese

(7) . $Y - y = \varphi\,(X-x)\,, \quad Y' - y = \downarrow (X'-x)$

le quali sono le projezioni dell' indicate rette nel piano delle $x\,y$. Di più dovendo le rette (4) e (5) esistere nel piano tangente dell' equazione (3) dovranno verificarsi le formule.

(8) . $1 = p\,m + q\,n\,, \quad 1 = p\,m' + q\,n'$

quindi in forza delle (6) si hà

(9) $m = \frac{1}{p + q\,\varphi}\,, \quad n = \frac{\varphi}{p + q\,\varphi}$

(10) . $m' = \frac{1}{p + q\downarrow}\,, \quad n' = \frac{\downarrow}{p + q\downarrow}$

La distanza $R$ frà due punti $x\,y\,z$, $X\,Y\,Z$ si esprime generalmente per

(11) $$\begin{cases} R^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = (Z-z)^2 (1 + m^2 + n^2) \\ = (Z-z)^2 \frac{(1 + p^2 + 2pq\varphi + (1+q^2)\varphi^2)}{(p+q\varphi)^2} \end{cases}$$

alla quale, chiamati $\alpha\ \beta\ \gamma$ gli angoli che essa forma con gli assi delle coordinate si uniscono le seguenti

Digitized by Google

$$(12)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+2pq\phi+(1+q^2)\phi^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \dfrac{\phi}{\sqrt{1+p^2+2pq\phi+(1+q^2)\phi^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \dfrac{p+q\phi}{\sqrt{1+p^2+2pq\phi+(1+q^2)\phi^2}} \end{cases}$$

E per una altra retta $R'$ corrispondente a $\downarrow$ si avrà similmente

$$(13)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{m'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+2pq\downarrow+(1+q^2)\downarrow^2}} \\ \cos\beta' = \dfrac{n'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}} = \dfrac{\downarrow}{\sqrt{1+p^2+2pq\downarrow+(1+q^2)\downarrow^2}} \\ \cos\gamma' = \dfrac{1}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}} = \dfrac{p+q\downarrow}{\sqrt{1+p^2+2pq\downarrow+(1+q^2)\downarrow^2}} \end{cases}$$

gli angoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sono vincolati evidentemente dalla relazione

$$(14)\qquad \cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$$

L'angolo poi $V$ di queste due rette, ossia delle due sezioni normali si hà per l'espressione trigonometrica.

$$(15)\quad \begin{cases} \cos V = \dfrac{1+mm'+nn'}{\sqrt{1+m^2+n^2}.\sqrt{1+m'^2+n'^2}} \\ = \dfrac{1+p^2+pq(\phi+\downarrow)+(1+q^2)\phi\downarrow}{\sqrt{1+p^2+2pq\phi+(1+q^2)\phi^2}.\sqrt{1+p^2+2pq\downarrow+(1+q^2)\downarrow^2}} \end{cases}$$

Che se queste due rette sono perpendicolari frà di loro dovrà verificarsi la condizione



Digitized by Google

$$(16) \qquad 1 + p^2 + p\,q\,(\phi + \psi) + (1 + q^2)\,\phi\,\psi = o$$

nelle quali equazioni rappresenta $\phi$ la tangente trigonometrica dell' angolo, che la retta toccante la projezione della sezione normale nel piano delle $x\ y$ forma con l'asse delle $x$.

3.° Suol chiamarsi *linea di massima pendenza* quella linea descritta sulla superficie, nella quale la sua retta tangente forma il massimo angolo con il piano delle $x\ y$. L'equazione di condizione facilmente si stabilisce, avvertendo che il piano delle $x\ y$ viene ad incontrare il piano tangente secondo una retta, che si ottiene facendo nella (3) $Z = o$, lo che dà

$$(17) \qquad Y - y = -\frac{p}{q}\left(X - x\right) - \frac{z}{q}$$

Ora la retta dell' equazione (17) è evidentemente perpendicolare in questo caso alla retta espressa per la prima delle (7); quindi la condizione

$$-\frac{p\,\phi}{q} + 1 = o, \quad \text{ovvero}$$

$$(18) \qquad q - p\,\phi = o$$

Determinata poi questa condizione, si ha facilmente l'angolo $\varepsilon$ formato dalla retta in proposito con il piano delle $x\ y$; essendo

$$cos\,\gamma = sen\,\varepsilon$$

quindi dalla ultima delle (12)

$$(19) \qquad tang.\,\varepsilon = \frac{p + q\,\phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}$$

Digitized by Google

ed in caso della (18)

$$(20) \qquad tang.\, s = \sqrt{p^2 + q^2}$$

4.° La distanza $R$, e per conseguenza la lunghezza di tutte le rette tangenti rimane indeterminata, finchè non sia cognita la legge che vincola le coordinate $X, Y, Z$. Supponiamo adunque che nel piano tangente sia descritta una linea di secondo grado dotata di centro, e precisamente nel punto di contatto $x, y, z$ E' evidente, che le $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, dipenderanno dall' equazione di una superficie del secondo grado, che racchiude in se la linea indicata e sarà della forma

$$(21) \quad A(X-x)^2+B(Y-y)^2+C(Z-z)^2+2D(X-x)(Y-y) \\ +2E(X-x)(Z-z)\ 2F(Y-y)(Z-z)=\pm K$$

dove i coefficienti $A$, $B$, $C$ . . . devono essere in generale funzioni delle coordinate $x$, $y$, $z$, dedotte dall' equazione (1) della superficie. Eliminando pertanto con quest' ultima equazione unitamente alle formule (4) i valori di $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ deduciamo

$$(22) \begin{cases} \dfrac{(X-x)^2}{m^2} = \dfrac{(Y-y)^2}{n^2} = \dfrac{(Z-z)^2}{1} = \dfrac{R^2}{1+m^2+n^2} \\ = \pm \dfrac{K}{Am^2+Bn^2+C+2Dmn+2Em+2Fn} \end{cases}$$

Sieno ora $G$, $H$, $I$, tre quantità proporzionali ai coseni degli angoli, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, che la retta normale alla superficie nel punto $x$, $y$, $z$ forma con gli assi delle coordinate; avremo chiaramente

Digitized by Google

$$(23) \qquad p = -\frac{\cos\lambda}{\cos\nu} = -\frac{G}{I}, \quad q = -\frac{\cos\mu}{\cos\nu} = -\frac{H}{I}$$

quindi sostituiti i valori di $m$, $n$ datici dalle formule (9), e ponendo per brevità

$$(24) \begin{cases} A+Cp^2+2Ep = -Ir, \quad Cpq+D+Eq+Fp = -Is \\ B+Cq^2+2Fq = -It, \quad K = KI \end{cases}$$

ed anche

$$(25) \qquad s+p^2 = r', \quad pq = s', \quad 1+q^2 = t'$$

deduciamo dall' equazione (22)

$$(26) \qquad R^2 = \mp K' \cdot \frac{(r'+2s'\varphi+t'\varphi^2)}{r+2s\varphi+t\varphi^2}$$

Il segno $\mp$ non è che apparente, mentre il primo membro deve essere necessariamente una quantità positiva; nel caso dunque di $K'$ negativo dovrà anche esserlo il denominatore della (26), La quantità $K'$ può avere una relazione con le $G$, $H$, $I$, che è importante di conoscere. Infatti avendosi dall' equazioni (23).

$$(27) \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \dfrac{G}{\sqrt{G^2+H^2+I^2}} \\ \cos\mu = \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \dfrac{H}{\sqrt{G^2+H^2+I^2}} \\ \cos\nu = -\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \dfrac{I}{\sqrt{G^2+H^2+I^2}} \end{cases}$$

si ottiene

$$(28) \qquad K = K'I = K\cos\nu \cdot \sqrt{G^2+H^2+I^2}$$

Digitized by Google

e ponendo

(29) $K' \cos \nu = \theta$

si hà in fine

(30) $\frac{K}{\theta} = \sqrt{G^2+H^2+I^2}$ , $\frac{K'}{\theta} = -\sqrt{1+p^2+q^2}$

e perciò la (26) si trasforma in

(31) $\frac{R^2}{\theta} = \pm\sqrt{1+p^2+q^2} \cdot \frac{r' + 2s'\varphi + t'\varphi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2}$

5.° Ciò posto si prendano sulla direzione della normale alla superficie nel punto $x, y, z$ tante lunghezze $\rho$ eguali al valore numerico di $\frac{R^2}{\theta}$ , cioè proporzionali ai quadrati dei semidiametri della linea di secondo grado descritta nel piano tangente; e sarà

(32) $\rho = \pm\sqrt{1+p^2+q^2} \cdot \frac{r' + 2s'\varphi + t'\varphi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2}$

Se con questa retta qual raggio si descriva un circolo, sarà questo tangente nel punto $x, y, z$, ad una sezione normale della superficie, corrispondente all'inclinazione $\varphi$ . Di questo circolo facilmente si determinano le coordinate $X_1\ Y_1\ Z_1$ del suo centro, mentre essendo generalmente

(33) $\rho = \sqrt{(x-X_1)^2 + (y-Y_1)^2 + (z-Z_1)^2}$

e per ipotesi

(34) $x - X_1 = -p(z-Z_1)$ , $y - Y_1 = -q(z-Z_1)$

le quali sono comprese nell' altre

Digitized by Google

$$(35)\quad \left\{ \frac{x-X_1}{p} = \frac{y-Y_1}{q} = \frac{z-Z_1}{(-1)} = \pm \frac{\sqrt{(x-X_1)^2+(y-Y_1)+(z-Z_1)^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right.$$
$$= \pm \frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

quindi in vigore della (32) si dedurranno dalle (35) le tre equazioni (*).

$$(36)\quad \left\{ \begin{array}{l} x-X_1 = p \cdot \dfrac{r^1 + 2s^1\varphi + t^1\varphi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2} \\ y-Y_1 = q \cdot \dfrac{r^1 + 2s'\varphi + t'\varphi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2} \\ z-Z_1 = -\cdot \dfrac{r' + 2s'\varphi + t\varphi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2} \end{array} \right.$$

Questo special circolo, del quale sono determinate in funzione delle coordinate del punto di contatto, si le coordinate del suo centro, che il suo raggio, lo chiameremo *circolo osculatore della curva* nel punto $x$, $y$, $z$ ed il raggio $\rho$ *Raggio di curvatura.* Un tal circolo è attissimo a farci conoscere l'andamento della curvedine di una linea per ogni suo punto; mentre fra tutti i possibili circoli i raggi dei quali sieno presi sulla direzione della normale, e tangenti nel punto $x, y, z$, hà questo il contatto più intimo, in modo tale, che fra l'arco della curva, ed il cor-

(*) Possiamo anche per semplicità porre $\theta = 1$; nel qual caso si ha $\rho = R^2$, cioè il raggio $\rho$ eguale al valore numerico di $R^2$.

Digitized by Google

spondente arco di circolo non ci può passare altro circolo, e ciò si scorge, poichè per determinare completamente la natura di un circolo fa d'uopo conoscere si il suo raggio, che le coordinate del suo centro; lo chè si verifica nelle formule (32), e (36). Tutta la difficoltà però consiste nella determinazione delle quantità $A, B, C \ldots\ldots$, e quindi di $r, s, t$., la qual cosa senza il calcolo differenziale non può in generale eseguirsi.

Contuttociò possono aggiungensi le seguenti riflessioni, le quali in parte sono indipendenti dal precedente.

6.° Prendasi sulla direzione della normale alla superficie nel punto $x, y, z$ una retta $\rho$ e descritta con essa qual raggio un circolo tangente ad una data sezione normale della superficie, sia di tal natura, che fra l'arco di circolo, ed il corrispondente della sezione niun' altro circolo passi; cioè che l'arco del circolo coll' arco della curva formi un'angolo minore di qualunque altro circolare. Questo circolo lo chiameremo *osculatore* della sezione nel dato punto, ed il raggio $\rho$ *Raggio di curvatura*. Stabilita una tal definizione se la retta $R$ di una certa lunghezza descritta nel piano tangente e toccante la sezione nello stesso punto $x, y, z$; si prenda qual media proporzionale tra il raggio di curvatura $\rho$, ed un altra retta $\theta$; è evidente rappresentare quest' ultima una retta, che da un punto fisso $x_0, y_0, z_0$ conducesi normalmente alla superficie nel punto $x, y, z$ quindi l'equazioni

$$(37)\quad \theta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$(38)\quad x - x_0 = -p(z - z_0),\ y - y_0 = -q(z - z_0)$$

e la condizione

Digitized by Google

$$(39) \qquad \rho = \frac{R^2}{\theta}$$

alle quali dovranno unirsi le (11) (33), e (34); perciò eliminando le $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ per mezzo delle formule (4) (9) congiunte alle precedenti otteniamo

$$(40) \quad \begin{cases} \dfrac{p^2(X-x)^2}{(x-X_1)(x-x_0)} = \dfrac{q^2(Y-y)^2}{\varphi^2(y-Y_1)(y-y_0)} = \dfrac{(Z-z)^2}{(p+q\varphi)^2(z-Z_1)(z-z_0)} \\ = \dfrac{1+p^2+q^2}{1+p^2+2pq\varphi+(1+q^2)\varphi^2} \end{cases}$$

Mà per un punto $x\,y\,z$ corrispondente ad una data sezione unico deve essere il valore del raggio $\rho$, e per conseguenza delle $x-X_1$, $y-Y_1$, $z-Z_1$; dunque le differenze $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, non potranno essere legate fra di loro, che per una funzione omogenea di due dimensioni; lo che ricade nelle formula (21).

Infine i valori delle $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ dalla (21), sostituiti nella (40), e ponendo

$$(41) \qquad \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{(-1)} = \frac{K'}{1+p^2+q^2}$$

ci porgono i valori delle $x-X_1$, $y-Y_1$, $z-Z_1$ espressi precisamente colle (36).

Riguardo poi alla determinazione delle $A$, $B$, $C\ldots$, ed anche di $G$, $H$, $I$, osservo che se l'equazione generale della superficie sia algebrica, e del grado $n$, la potremo rappresentare sotto tre diverse forme cioè

Digitized by Google

$$(42)\quad \begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \\ b_0y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \ldots + b_{n-1}y + b_n = 0 \\ c_0z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} + \ldots + c_{n-1}z + c_n = 0 \end{cases}$$

nelle quali le $a_0, b_0, c_0$ sono quantità costanti, e le $a_1\ b_1\ c_1$, $a_2\ b_2\ c_2 \ldots a_n\ b_n\ c_n$ sono funzioni del primo del secondo ... dell' $n^{simo}$ grado riguardo alle variabili $yz$, $xz$, $xy$. Ora della teoria dell'equazioni riguardante la formazione dei polinomi derivati si sà, che la derivata di un' equazione si ottiene passando l'esponente della variabile in coefficiente, e diminuendo di un' unità l'esponente stesso; dunque se nell' equazioni (42) si prendono le successive derivate rispetto alle $x$, $y$, $z$, e ponendo

$$(43)\quad \begin{cases} G = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \\ H = nb_0y^{n-1} + (n-1)b_1y^{n-2} + \ldots + b_{n-1} \\ I = nc_0z^{n-1} + (n-1)c_1z^{n-2} + \ldots + c_{n-1} \end{cases}$$

si avranno i valori di $p$, $q$ espressi dalle (23). Si prosiegua la derivazione delle (43) rapporto alle stesse variabili, e pongasi per semplicità

$$(44)\quad \begin{cases} A = n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2} \\ B = n(n-1)b_0y^{n-2} + (n-1)(n-2)b_1y^{n-3} + \ldots + 2b_{n-2} \\ C = n(n-1)c_0z^{n-2} + (n-1)(n-2)c_1z^{n-3} + \ldots + 2c_{n-2} \end{cases}$$

Sieno di più $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots$ ciò, che divengone i polinomi $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ facendo la derivazione nella $G$ riguardo alla $y$, ed alla $z$, e sieno $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \ldots$ ciò che divengono le $c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ esa-



Digitized by Google

guita la derivazione nella $I$ rispetto alla $y$; e si ponga per brevità

$$(45)\begin{cases} D = (n-1)\alpha_1 x^{n-2} + (n-1)(n-2)\alpha_2 x^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-1} \\ E = (n-1)\beta_1 x^{n-2} + (n-1)(n-2)\beta_2 x^{n-3} + \ldots + \beta_{n-1} \\ F = (n-1)\gamma_1 z^{n-2} + (n-1)(n-2)\gamma_2 z^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-1} \end{cases}$$

Saranno questi i parametri della superficie del secondo grado espressa per l'equazione (21). E' evidente poi essere regolarmente eseguita la disposizione dei coefficienti $A, B, C \ldots$ nella medesima (21). mantenendosi così di $n$ dimensioni riguardo alle $x, y, z$. Non sarebbe difficile ad estendere questo ragionamento per le superficie di equazione trascendente. (*)

---

(*) *Sarà facile il dimostrare in qual maniera possano esprimersi i coefficienti* $A, B, C, \ldots G, H, I,$ *e quindi* $r, s, t$ *facendo uso del calcolo differenziale.*

*Rappresentando sempre con*

$$(a) \quad u = o, \quad \text{ovvero } f(x, y, z) = o$$

*l'equazione della superficie, la quale risoluta riguardo a* $z$ *dia*

$$(a') \quad z = f(x, y)$$

*Presi i differenziali di queste due avremo*

$$(a'') \quad \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{du}{dy} \cdot dy + \frac{du}{dz} \cdot dz = o$$

$$(a''') \quad dz = p\,dx + q\,dy$$

*dove* . . .

Digitized by Google

7.° Se la superficie curva dell' equazione (1) di trasformasse in una superficie piana, allora la sezione normale diviene una linea retta, la curvedine della quale è nulla: perciò il suo raggio di curvatura deve eguagliare l'infinito, e poichè in questo caso le

---

$$(a^{IV}) \qquad p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}$$

*Eliminando il valore di dz fra le* $(a^{II})$ $(a^{III})$ *si deduce in forza dell' indipendenza delle variabili* $x, y$

$$(a^{V}). \qquad \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} p = o, \quad \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} q = o$$

*ed il paragone delle* $(a^{V})$ *con le* (23) *ci dà*

$$(a^{VI}). \qquad G = \frac{du}{dx}, \quad H = \frac{du}{dy}, \quad I = \frac{du}{dz}$$

*Differenziando di nuovo l'equazioni* $(a'')$, $(a''')$ *ed eliminando i differenziali* $dz^2$, *e* $d^2z$ *per la stessa ragione dell' indipendenza di* $x, y$ *si hanno le tre equazioni a differenze parziali*

$$(a^{VII}) \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dz}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 + 2\dfrac{d^2u}{dxdz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{du}{dz}\dfrac{d^2z}{dx^2} = o \\ \dfrac{d^2u}{dz^2}\dfrac{dz}{dx}\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{d^2u}{dxdy} + \dfrac{d^2u}{dxdz}\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{d^2u}{dydz}\cdot\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{du}{dz}\dfrac{d^2z}{dxdy} = o \\ \dfrac{d^2u}{dy^2} + \dfrac{d^2u}{dz^2}\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2 + 2\dfrac{d^2u}{dydz}\cdot\dfrac{dz}{dy} + \dfrac{du}{dz}\cdot\dfrac{d^2z}{dy^2} = o \end{cases}$$

*d'onde ponendo*

Digitized by Google

quantità $p$, $q$, $\varphi$ sono costanti dovrà verificarsi per la condizione, $\rho = \infty$, ancora $r = o$, $s = o$, $t = o$ Che se per semplicità si prendano gli assi principali della superficie di secondo grado paralleli ai coordinati sarà anche $D = o$, $E = o$, $F = o$ d'onde la seconda delle (24), ci ottiene $C = o$, quindi

---

$$(a^{VIII}) \cdot r = \frac{d^2z}{dx^2} \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{dz^2}{dy^2}$$

*il paragone delle* $(a^{VII})$ *con le* (24) *ci dà*

$$(a^{IX}) \begin{cases} A = \dfrac{d^2u}{dx^2}, \; B = \dfrac{d^2u}{dy^2}, \quad C = \dfrac{d^2u}{dz^2} \\ D = \dfrac{d^2u}{dxdy}, \quad E = \dfrac{d^2u}{dxdz}, \; F = \dfrac{d^2u}{dydz} \end{cases}$$

*Imaginando poi l'indicata sezione normale potremo porre*

$$(a^{X}) \quad y = \downarrow (x)$$

*e quindi*

$$(a^{XI}). \quad \frac{dy}{dx} = \downarrow' (x) = \varphi$$

*ed il raggio* $\rho$ *di curvatura si esprimerà*

$$(a^{XII}) \cdot \quad \rho = \pm V\, 1 + p^2 + q^2 \cdot \frac{r' + 2s'\varphi + t'\varphi^2}{r + 2s\varphi + t\varphi^2}$$

*nella quale il significato delle* $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ . . . $\varphi$ *deve aversi dalle* $(a^{IV})$ $(a^{VIII})$ *come già si conosce dal calcolo differenziale.*

Digitized by Google

anche le altre due danno $A = o$ $B = o$; dunque nel caso di un piano dovranno annullarsi nel tempo stesso le $A$, $B$, $C$, ed $r$, $s$, $t$. Ciò potea anche dedursi dalla considerazione dell' equazioni (43) (44), e (45).

8.° Imàginando la projezione della linea di secondo grado descritta sul piano tangente nel piano delle $x\,y$, se ne hà tosto l'equazione eliminando $Z - z$ per mezzo delle (3) e (21), e facendo attenzione alle (24) si ricava

$$(46)\quad r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = \pm K'$$

Questa linea di secondo grado suol chiamarsi *curva indicatrice* della superficie dell' equazione (1), come per il primo hà fatto il sig. Dupin (*) facendo uso di considerazioni dedotte sì dal calcolo differenziale; che dal calcolo Integrale. La discussione dell' equazione di questa curva ci sarà utilissima per scoprire le proprietà generiche della curvedine di una superficie; come si vedrà per l'appresso.

Così se si domandi qual sia la condizione perchè due semidiametri $R$, $R'$ corrispondenti alle tangenti $\varphi$, $\psi$, sieno conjugati, sarà lo stesso indagarlo per i semidiametri della *curva indicatrice* di secondo grado. Sieno $\xi$, $\eta$ le coordinate di un punto qualunque di una retta tangente la curva (46) di secondo grado in un punto $X-x$, $Y-y$ l'equazione di questa retta sarà della forma

$$(47)\quad [t(Y-y)+s(X-x)](\eta-y)+[s(Y-y)+r(X-x)](\xi-x) = \pm K'$$

Ora perchè due semidiametri di una linea di secondo

(*) Developpement de geometrie pag. 147.

Digitized by Google

grado sieno conjugati fà d'uopo, che una retta condotta dal centro, e dell' equazione

$$(48). \quad \eta - \gamma = \frac{Y' - \gamma}{X - x}(\xi - x)$$

sia parallela alla tangente cioè alla (47). Questa condizione si esprime evidentemente per

$$(49). \; [t(Y-\gamma)+s(X-x)](Y'-\gamma)+[s(Y-\gamma)+r(X-x)](X'-x)=0$$

e poichè dall' equazioni (7) si ha

$$\varphi = \frac{Y-\gamma}{X-x}, \qquad \downarrow = \frac{Y'-\gamma}{X'-x}$$

perciò si deduce

$$(50). \quad r + s(\varphi + \downarrow) + t\,\varphi\downarrow = 0$$

Tal' è l'equazione di condizione perchè due semidiametri $R$, $R'$ sieno conjugati, sarà questa chiamata, *Equazione alle tangenti conjugate.*

9.° L'equazione (50) alle tangenti conjugate ci dà il mezzo per avere il valore del raggio di curvatura $\rho$ massimo, e minimo, lo che ci porta a conoscere le così dette *linee di curvatura* della superficie.

Infatti è evidente, che allora i raggi di curvatura $\rho$, $\rho'$ saranno l'uno massimo e l'altro minimo, quando i semidiametri $R$, $R'$ sieno i principali della linea di secondo grado descritta nel piano tangente, mà dalle proprietà delle linee di secondo grado due condizioni si richiedono; cioè che i semidiametri $R$, $R'$ sieno non solo ad angolo retto, mà ben anche conjugati. La condizione della perpendicolarità ci vien data dalla formula (16), nella quale introdotti i valori delle (25) si trasforma in

Digitized by Google

(51) . $r' + s'(\varphi + \psi) + t'\varphi\psi = o$

e l'altra condizione si verifica nelle (50). Ora è evidente essere le relazioni (50), e (51) della forma medesima, quindi eliminata per esempio la $\psi$ risulterà l'equazione di secondo grado rispetto a $\varphi$, cioè

(52) . $A_1\varphi^2 + B_1\varphi + C_1 = o$

dove senza difficoltà si hà

$$(53)\begin{cases} A_1 = t's - s't = s(1+q^2) - pqt \\ B_1 = t'r - r't = r(1+q^2) - t(1+p^2) \\ C_1 = s'r - r's = pqr - s(1+p^2) \end{cases}$$

Risoluta poi la (52) ci darà il doppio valore di $\varphi$ per l'indicate sezioni, e sarà

$$(54) . \quad \varphi = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}$$

I raggi infine $\rho_1$ $\rho_2$ di curvatura corrispondenti al doppio valore di $\varphi$ sono ponendo prima

$$(55) . \quad K_1 = \pm\sqrt{1+p^2+q^2}$$

ed avvertendo alle (50), e (51).

$$(56)\begin{cases} \rho_1 = K_1\dfrac{(\varphi-\psi)(s'+t'\varphi)}{(\varphi-\psi)(s+t\varphi)} = K_1\cdot\dfrac{s'+t'\varphi}{s+t\varphi} = K_1\dfrac{r'+s'\varphi}{r+s\varphi} \\ \rho_2 = K_1\dfrac{(\psi-\varphi)(s'+t'\psi)}{(\quad-\varphi)(s+t\psi)} = K_1\dfrac{s'+t'\psi}{s+t\psi} = K_1\dfrac{r'+s'\psi}{r+s\psi} \end{cases}$$

dove $\psi$ corrisponde all' altro valore di $\varphi$, dalle quali ricaviamo le altre due

Digitized by Google

$$(57)\quad \begin{cases} \rho_1+\rho_2=K_1\dfrac{(t'r-2s's+r't)}{rt-s^2}=K_1\dfrac{[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]}{rt-s^2} \\ \rho_1\,\rho_2=K_1^2\dfrac{(r't'-s'^2)}{rt-s^2}=K_1^2\dfrac{(1+p^2+q^2)}{rt-s^2}=\dfrac{K_1^4}{rt-s^2} \end{cases}$$

Quest' equazioni c'insegnano, che i valori di $\rho_1$, $\rho_2$ dipendono dalla risoluzione di un equazione di secondo grado, nella quale chiamata $\rho_0$ la variabile, si può rappresentare per

$$(58)\quad (rt-s^2)\rho_0^2-K_1(t'r-2s's+r't)\rho_0+K_1^2(r't'-s'^2)=0$$

Similmente ponendo nella formula (32)

$$(59)\qquad Q=\frac{r+2s\varphi+t\varphi^2}{r'+2s'\varphi+t'\varphi^2}$$

si hà

$$(60)\qquad \rho=\frac{K_1}{Q}\,,\quad \rho^2=\frac{K_1^2}{Q^2}$$

e la medesima (58) diviene

$$(61)\quad (r't'-s'^2)\,Q^2-(t'r-2s's+r't)\,Q+rt-s^2=0$$

e ci dà essa un doppio valore di $Q$ corrispondente al doppio valore di $\varphi$.

10.° La direzione delle rette tangenti alle sezioni di massima, e minima curvatura ed espressa dall' equazione (54) si può anche ottenere per mezzo dei coseni degli angoli, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, che queste medesime formano con gli assi delle coordinate. Infatti eliminando la $\lambda$ tra l'equazioni (50) e (51) si hà

$$(62)\qquad \frac{r+s\varphi}{r'+s'\varphi}=\frac{s+t\varphi}{s'+t'\varphi}$$

Digitized by Google

quindi avvertendo essere

$$\varphi = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

le formule (59), e (62) si trasformano in

$$(63)\quad \begin{cases} Q = \dfrac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{r'\cos^2\alpha + 2s'\cos\alpha\cos\beta + t'\cos^2\beta} \\ \dfrac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{r'\cos\alpha + s'\cos\beta} = \dfrac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{s'\cos\alpha + t'\cos\beta} \end{cases}$$

e poichè in forza della formula (14)

$$r'\cos^2\alpha + 2s'\cos\alpha\cos\beta + t'\cos^2\beta = 1$$

perciò dall' ultima dell' equazioni (63) per la teoria delle proporzioni ricaviamo

$$(64)\quad \begin{cases} \dfrac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{r'\cos\alpha + s\cos\beta} = \dfrac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{s'\cos\alpha + t'\cos\beta} \\ = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta \end{cases}$$

o semplicemente

$$(65)\qquad Q = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta$$

$$(66)\quad \frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{r'\cos\alpha + s'\cos\beta} = \frac{s\cos\alpha + t\cos\beta}{s'\cos\alpha + t'\cos\beta} = Q$$

Quest' equazione ultima poi darà origine alle altre due, cioè

$$(67)\quad \begin{cases} (r - Qr')\cos\alpha + (s - Qs')\cos\beta = 0 \\ (s - Qs')\cos\alpha + (t - Qt')\cos\beta = 0 \end{cases}$$

e dalla prima di questa si ricava



Digitized by Google

$$(68)\qquad \frac{\cos\alpha}{s-Qs'}=\frac{\cos\beta}{Qr'-r}$$

d'onde per la teoria delle proporzioni avvertendo sempre all' equazione (14) viene

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{s-Qs}=\dfrac{\cos\beta}{Qr'-r}=\dfrac{\cos\gamma}{ps-qr+qQ} \\ =\pm\dfrac{1}{\sqrt{[(s-Qs')^2+(Qr'-r)^2+(ps-qr+qQ)^2]}} \end{cases}$$

Sotto un' altra forma possono mettersi questi valori, se si moltiplichi il secondo membro, e si divida per $\sqrt{1+p^2}$. Con questo metodo, ed in vigore della (55) si deduce

$$(70)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{s-Qs'}=\dfrac{\cos\beta}{Qr'-r}=\dfrac{\cos\gamma}{ps-qr+qQ} \\ =\pm\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{[(r's-s'r)^2+K_1^2(r'Q-r)^2]}} \end{cases}$$

Tali sono l'equazioni finali dalle quali abbiamo il doppio valore degli angoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ per le sezioni di massima, e minima curvatura. E' importante in fine il conoscere, che i due valori di $Q$ sono reali; poichè risolvendo l'equazione (61), vengono essi espressi per

$$(71)\ .\quad Q=\frac{r't-2ss'+t'r\pm\sqrt{(r't-2ss'+t'r)^2-4K_1^2(rt-s^2)}}{2K_1^2}$$

Ora si hà evidentemente il risultato positivo

Digitized by Google

$$(72)\quad \begin{cases} (r't - 2ss' + t'r)^2 - 4K_1^2(rt - s^2) \\ = \dfrac{[r'(r't - t'r) + 2s'(s'r - r's)]^2 + 4K_1^2(s'r - r's)^2}{(1 + p^2)^2} \end{cases}$$

Dunque i due valori di $Q$ sono reali.

11.° Dalla medesima formula (61) scorgiamo che nel caso, ove sia

$$(73).\quad rt - s^2 > 0$$

i due valori di $Q$ corrispondenti ai due raggi di curvatura principali sono quantità del medesimo segno; dunque allora questi raggi di curvatura sono diretti in un medesimo senso, e rappresentano i due valori l'uno *massimo*, e l'altro *minimo*, della $\rho$. Se poi si abbia

$$(74).\quad rt - s^2 < 0$$

le due radici dell'equazione (61) sono quantità di segno contrario, ed i raggi di curvatura diretti in senso contrario rappresentano due valori *minimi* della medesima $\rho$. Infine se si abbia

$$(75).\quad rt - s^2 = 0$$

una delle radici dell'equazione (61) si annulla, ed il valore *massimo* del raggio di curvatura diviene infinito, cioè una delle sezioni sarà di curvedine nulla. Questo si verifica in una superficie sviluppabile; e per conseguenza i valori di $r$, $s$, $t$ dedotti dall'equazione di una simile superificie verificheranno la formula (75); qualunque sieno i valori attribuiti alle variabili $x$, $y$, $z$. Nel caso poi, che nell'equazione (71) risoluta riguardo a $Q$ svanisca la quantità

Digitized by Google

sotto il vincolo radicale, vale a dire l'espressione (72) dovrà allora verificarsi

$$s'r - r's = o\,, \qquad r't - t'r = o\,, \qquad \text{ovvero}$$

$$pqr - (1+p^2)s = o\,,\ (1+p^2)t - (1+q^2)r = o$$

e quindi la condizione

$$(76)\,. \qquad \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2} = Q \qquad (*)$$

Dunque allora tutti i valori di $Q$ e $\rho$ divengono uguali fra loro; ed i valori di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ espressi per le (70) divengono indeterminati. Annullandosi in ultimo il coefficiente di $Q$ nella stessa formula (61) si ottiene la condizione

$$(77)\,.\ (1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r = o$$

ed allora essendo i due valori di $Q$ uguali, mà di segno contrario; nè verrà che detta condizione appartiene ai punti nei quali i raggi di curvatura sono uguali, e diretti in senso contrario.

Tutte queste conseguenze si dedurranno anche in appresso eseguendo la discussione sull' equazione di secondo grado della *curva indicatrice.*

12.° Volendosi determinare per un punto qualunque $x$, $y$, $z$ della superficie le direzioni delle tan-

---

(*) . *Questi punti nella superficie, ne' quali si verifica l' indicata condizione sono chiamati dai francesi* ombilics. *Sono essi molto rimarchevoli nello studio di geometria descrittiva.*

Digitized by Google

genti alle sezioni normali dove sonovi i raggi di curvatura principale; basterà a cercare gli assi principali di una linea del secondo grado prodotta dall' intersezione della superficie (21) con il piano dell' equazione (3); Mà per non dilungarci di troppo supporrò, che gli assi principali della superficie del secondo grado sieno paralleli ai coordinati; e per conseguenza $D=o$, $E=o$, $F=o$; quindi sostituendo nella (3) i valori presi dalle (23) dovremo considerare il sistema delle tre equazioni

$$(78)\begin{cases} A(X-x)^2+B(Y-y)^2+C(Z-z)^2=\pm K \\ (X-x)\cos\lambda+(Y-y)\cos\mu+(Z-z)\cos\nu=o \\ R^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2 \end{cases}$$

Se in luogo dei coseni degli angoli $\lambda$, $\mu$, $\nu$ si sostituiscono le tre quantità $G$, $H$, $I$ ai stessi coseni proporzionali, e si moltiplichi la seconda delle (78) per un fattore indeterminato $-T$, unitamente alla terza delle (78) dovrassi attendere all' equazione

$$(79)\quad A(X-x)^2+B(Y-y)^2+C(Z-z)^2-TG(X-x)$$
$$-TH(Y-y)-TI(Z-z)=\pm K$$

o ben anche

$$(80).\ (X-x)[A(X-x)-TG]+(Y-y)[B(Y-y)-TH]$$
$$+(Z-z)[C(Z-z)-TI]=\pm K$$

Ora perchè la distanza $R$ sia un semidiametro principale conviene, che sia normale al punto $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ della superficie. Questa condizione, come si sà dalla teoria delle superficie del secondo grado ci vien data dalla (80) per il sistema dell'equazioni

Digitized by Google

$$(81).\quad \frac{A(X-x)-TG}{X-x} = \frac{B(Y-y)-TH}{Y-y} = \frac{C(Z-z)-TI}{Z-z}$$

quindi per la teoria delle proporzioni, ed avvertendo alle (78) si ottiene

$$(82)\quad \begin{cases} \dfrac{A(X-x)-TG}{X-x} = \dfrac{B(Y-y)-TH}{Y-y} = \dfrac{C(Z-z)-TI}{Z-z} \\ = \pm\dfrac{K}{R^2} = \pm\dfrac{K}{\theta\rho} \end{cases}$$

e ritenendo come sopra $\theta = 1$, ed osservando che in forza delle formule (30), (55), e (60)

$$\pm K = \pm IK' = \mp I\sqrt{1+p^2+q^2} = IK_1$$

e facendo per semplicità

$$(83)\quad \pm\frac{K}{\rho} = \frac{IK_1}{\rho} = IQ = Q'$$

e per conseguenza dalle (82) si ha

$$(84)\quad \begin{cases} (A-Q')(X-x) = TG \\ (B-Q')(Y-y) = TH \\ (C-Q')(Z-z) = TI \end{cases}$$

Sostituendo i valori di $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ di quest' equazioni nella seconda delle (78) dopo di aver permutato $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ nelle $G$, $H$, $I$, si ha la condizione

$$(85)\quad \frac{G^2}{A-Q'} + \frac{H^2}{B-Q'} + \frac{I^2}{C-Q'} = 0$$

Digitized by Google

dalla quale si ricava il doppio valore di $Q^1$, e quindi di $Q$. Infine essendo le coordinate $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ proporzionali ai coseni degli angoli $\alpha, \beta, \gamma$ perciò dalle stesse (84) avremo

$$(86)\quad \begin{cases} \dfrac{(A-Q^1)\cos.\alpha}{G} = \dfrac{(B-Q^1)\cos.\beta}{H} = \dfrac{(C-Q^1)\cos.\gamma}{I} \\ = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{G}{A-Q^1}\right)^2 + \left(\dfrac{H}{B-Q^1}\right)^2 + \left(\dfrac{I}{C-Q^1}\right)^2}} \end{cases}$$

le quali corrispondono alle (69); ed il rimanente si determina facilmente come sopra.

13.° Tutti questi risultati si rendono più semplici supponendo, che il piano delle $xy$ siano paralleli al piano tangente; sarà in questo caso $p=o$, $q=o$, e l'espressione (32) del raggio di curvatura diviene

$$(87)\qquad \rho = \pm \frac{1+\varphi^2}{r+2s\varphi+t\varphi^2}$$

Che se di più suppongasi essere gli assi principali della linea di secondo grado descritta nel piano tangente paralleli ai coordinati delle $x$, $y$; dovrà essere non solo $C=o$, $E=o$, $F=o$, mà ben anche $D=o$ e dalle (24) deducesi

$$A=-Ir \quad , \quad s=o \quad , \quad B=-It$$

Infine negli angoli $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ verificasi

$$\gamma = 90^\circ \quad , \quad sen.\,\alpha = cos.\,\beta\,;$$

e perciò

Digitized by Google

$$(88) \qquad \varphi = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

dunque il raggio di curvatura riducesi ad

$$(89) \quad \rho = \pm \frac{1 + \varphi^2}{r + t\varphi^2} = \pm \frac{1}{r\ cos^2\alpha + t\ sen^2\alpha}$$

Si ottengono ora facilmente i due raggi di curvatura principale facendo successivamente $\alpha = o$ , $\alpha = 90°$, e quindi

$$\rho_1 = \pm \frac{1}{r} \ , \quad \rho_2 = \pm \frac{1}{t}$$

e l'equazione (88) diviene

$$(90) \quad \rho = \frac{\rho_1\ \rho_2}{\rho_2\ cos^2\alpha + \rho_1\ sen^2\alpha}$$

la quale sussiste tutte le volte, che le quantità $r$, $t$ sono del medesimo segno; il qual caso è incluso nella condizione (73): mentre si ritiene sempre $s = o$; Nel caso poi contrario, ed incluso nella condizione (74) la (88) si rappresenterà per

$$(91) \quad \pm \rho = \frac{\rho_1\ \rho_2}{\rho_2\ cos^2\alpha - \rho_1\ sen^2\alpha}$$

la diversità dei segni del primo membro deve assumersi secondo che il raggio $\rho$ è diretto nel senso di $\rho_1$, o di $\rho_2$. Se per un caso particolare abbiasi $r = t$, si avrà immediatamente $\rho_1 = \rho_2$ e quindi $\rho = \rho_1$ la qual conseguenza combina con le formule (76). Infine se una delle quantità $r$, $t$ svanisca, e per fissare le

Digitized by Google

idee $t = o$ allora viene $\rho = \infty$, e la (90) diventa

$$(92) \quad \rho = \frac{\rho_1}{\cos^2\alpha}$$

e tutto questo accordasi con formule (75). (*).

---

(*) *L'equazione* (89) *dà origine ad una costruzione grafica, che sarà utile di conoscere. Essendo generalmente dalla trigonometria*

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha \;, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

*la* (90) *si trasforma in*

$$(h) \qquad \rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2) - (\rho_1-\rho_2)\cos 2\alpha}$$

*Ora chiamando* $a$, $b$ *i semiassi principali di una curva di secondo grado e* $c$ *la sua eccentricità, e ponendo*

$$(h') \quad \rho_1 + \rho_2 = 2a \quad \rho_1 - \rho_2 = 2c \;, \; \sqrt{a^2 - b^2} = c$$

*d'onde*

$$(h'') \quad \rho_1 = a + \sqrt{a^2 - b^2} \quad \rho_2 = a - \sqrt{a^2 - b^2} \;, \quad \rho_1\rho_2 = b^2$$

*e la* (h) *diviene*

$$(h''') \qquad \rho = \frac{b^2}{a - c\cos 2\alpha}$$

*Equazione polare di una curva di secondo grado; e di facile costruzione.*



Digitized by Google

14.° Passiamo finalmente alla discussione della *curva Indicatrice* di secondo grado espressa per l'equazione (47); cioè

$$(93)\quad r(X-x)^2 + 2s\,(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = \pm K^1$$

Ora in generale un' equazione di secondo grado tra due variabili rappresenta generalmente un ellissi, un iperbole od una parabola, e le varietà di queste curve. Pertanto l'equazione (93) appartiene ad un ellissi se si abbia la differenza

$$(94)\quad rt - s^2$$

positiva, due iperbole conjugate (*) se la stessa differenza sia positiva; e due rette parallele se la detta differenza si annulla; mentre nel caso che la differenza (94) si annulla, la parabola inclusa nella (93) trasformasi in un sistema di due rette parallele. Di più, l'ellissi si trasforma in un circolo se abbiasi $r = t$, ed $s = o$; che se inoltre valga la condizione di $K' = o$ l'ellissi si ridurrà al punto $(x, y, z)$.

E' importante di osservare, che per ciascuna sezione normale le coordinate $X-x$, $Y-y$ verificano sempre una sola dell'equazioni

---

(*) *Si chiamano* iperbole conjugate *due iperbole le quali abbiano il medesimo centro, i medesimi assintoti, ed i medesimi assi con questa differenza, che l'asse reale dell'una sia perpendicolare all'asse reale dell' altra; e ciò verificasi nella* (93), *che per il doppio segno di K dà origine a due iperbole; purchè sia negativa la* (94).

Digitized by Google

$$(95)\quad r(X-x)^2 + 2s\,(X-x)(Y-y) + t\,(Y-y)^2 = K'$$

$$(96)\quad r(X-x)^2 + 2s\,(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = -K'$$

comprese ambedue nelle (93). Dunque se nel passaggio di una sezione normale ad un altra il primo membro dell' equazione (93) cangia di segno, i raggi di curvatura delle due sezioni normali saranno diretti in senso contrario. Questo però non accade nel caso della differenza (94) negativa, cioè quando la (93) rappresenta un sistema di due iperbole conjugate. Allora il piano tangente la superficie data dell'equazione (1) divide questa superficie in due parti, e l'una di queste parti comprende le sezioni normali, nelle quali il raggio di curvatura è diretto in un senso, e l' altra parte comprende le sezioni normali nelle quali il raggio di curvatura è diretto in senso contrario. Ma finchè l' equazione (93) appartiene ad un ellissi, si ridurrà sempre per tutte le sezioni normali ad una sola delle formule (95) (96). Dunque in questo caso tutte le sezioni normali hanno la loro curvatura diretta in uno stesso senso e per conseguenza la superficie curva viene situata tutta intera da un medesimo lato del piano tangente. Dalle cose finora esposte ne discende, che appartenendo la (93) ad un ellissi i raggi di curvatura principale diretti nello stesso senso, saranno un valore *minimo*, ed un valore *massimo* della variabile $\varrho$, per le sezioni normali della più grande, e della più piccola curvatura. All' opposto se la (93) appartiene ad un sistema di due iperbole conjugate, i raggi di curvatura principale, diretti in senso contrario sono due valori *minimi* della variabile $\varrho$ per le sezioni normali della più gran curvatura.



Digitized by Google

Infine se la differenza (94) è nulla, la curva dell' equazione (93) appartiene ad una parabola, la quale però trasformasi evidentemente in questo caso in un sistema di due rette parallele, e può considerarsi come un ellissi nella quale l'asse maggiore è divenuto infinito. Perciò le sezioni principali corrispondono ad un valore *minimo* e ad un valore infinito della variabile $\rho$, in modo, che una di queste sezioni ha nulla la sua curvatura; e tutto ciò combina con quel che si è stabilito al n.° 11.°

15.° Passiamo a fare qualche applicazione. Abbiamo già osservato, che tutta la difficoltà di questo metodo consiste nella determinazione delle quantità $A$, $B$, $C$ . . . . e quindi di $r$, $s$, $t$, la quale senza il calcolo differenziale non può eseguirsi generalmente. Fortunatamente però riesce di poca difficoltà per le superficie del secondo grado facendo uso del seguente ragionamento.

Se, come è avvertito al n.° 12°, gli assi principali della superficie del secondo grado dell' equazione (21) sieno paralleli ai coordinati dovrà essere $D = o$, $E = o$, $F = o$. Suppongasi ora che i coefficienti $A$, $B$, $C$ sieno quantità costanti, e che il trinomio formato $Ax^2 + By^2 + Cz^2$ uguagli parimenti una quantità costante, che per semplicità potremo essere l' unità. In questo stato di cose l' equazione

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \tag{97}$$

rappresenta un ellissoide, purchè $A$, $B$, $C$ sieno quantità positive. Chiamati pertanto $2a$, $2b$, $2c$ gli assi principali, sarà

$$A = \frac{1}{a^2}, \; B = \frac{1}{b^2}, \; C = \frac{1}{c^2} \tag{98}$$

Digitized by Google

e la formula (97) diviene

$$(99) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ora per un ellissoide si ha

$$(100) \begin{cases} p = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x}{z} = -\dfrac{\dfrac{x}{a^2}}{\dfrac{z}{c^2}} = -\dfrac{G}{I} \\ q = -\dfrac{c^2}{b^2} \cdot \dfrac{y}{z} = -\dfrac{\dfrac{y}{b^2}}{\dfrac{z}{c^2}} = -\dfrac{H}{I} \end{cases}$$

quindi per analogia alle (98) potremo stabilire

$$(101) \quad G = \frac{a^2}{x}, \quad H = \frac{y}{b^2}, \quad I = \frac{z}{c^2}$$

d' onde dalle (24) ricaviamo

$$(102) \begin{cases} r = \dfrac{A + Cp^2}{-I} = -\dfrac{c^2(a^2z^2 + c^2x^2)}{a^4z^3} \\ s = \dfrac{Cpq}{-I} = -\dfrac{c^4xy}{a^2b^2z^3} \\ t = \dfrac{B + Cq^2}{-I} = -\dfrac{c^2(b^2z^2 + c^2y^2)}{b^4z^3} \end{cases}$$

Noi dunque facendo uso dell'equazioni (83), (85),

Digitized by Google

(86), ed osservando che

$$(103)\quad K = \sqrt{G^2 + H^2 + I^2} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

avremo per l'ellissoide le tre equazioni, le quali per semplicità possono mettersi sotto la forma seguente

$$(104)\quad \frac{1}{\rho} = \pm Q' \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(105)\quad \begin{cases} \dfrac{(1 - Q'a^2)\cos.\alpha}{x} = \dfrac{(1 - Q'b^2)\cos.\beta}{y} = \dfrac{(1 - Q'c^2)\cos.\gamma}{z} \\ = \pm \left\{\left(\dfrac{x}{1 - Q'a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{1 - Q'b^2}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{1 - Q'c^2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$(106)\quad \frac{x^2}{a^2(1 - Q'a^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - Q'b^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - Q'c^2)} = 0$$

Le formule (105) determinano per ciascun punto dell' ellissoide la direzione delle tangenti alle sezioni principali, e dalla (104) si avrebbero i due raggi di curvatura principale. Di più sottratta dall'equazione (99) dell' ellissoide la (106) verrà

$$(107)\quad \frac{x^2}{a^2 - \frac{1}{Q'}} + \frac{y^2}{b^2 - \frac{1}{Q'}} + \frac{z^2}{c^2 - \frac{1}{Q'}} = 1$$

Dunque se dopo di aver calcolato l'uno dei valori massimo o minimo di $Q$ e quindi di $Q'$, e si costruisca una nuova ellissoide di semiassi $a'$, $b'$, $c'$ determinati per l' equazioni

Digitized by Google

$$(108)\quad a'^2 = a^2 - \frac{1}{Q'},\quad b'^2 = b^2 - \frac{1}{Q'},\quad c'^2 = c^2 - \frac{1}{Q'}$$

Questa nuova ellissoide passerà ancora per il punto $x, y, z$; e poichè si ha

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,\quad a'^2 - c'^2 = a^2 - c^2,\quad b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2$$

nè verrà per conseguenza, che le sezioni fatte in quest' ellissoide con i piani coordinati sono descritte con i medesimi fuochi. Abbiamo già accennato, che dalla formula (104) si ottengono i due raggi di curvatura principale per un punto qualunque dell'ellissoide sostituendovi il doppio valore di $Q'$; la qual operazione ci condurrebbe ad un espressione rimarchevole; ma potremo arrivarvi più facilmente facendo uso dell'equazione (58) la quale però risoluta riguardo a $\rho_0$ e ricordandoci che

$$K_1^2 = r't' - s'^2 = 1 + p^2 + q^2$$

ci darà

$$(109).\quad \rho_0 = K_1 \frac{(t'r - 2ss' + r't)}{2(rt - s^2)}$$

$$= \pm \sqrt{\left\{K_1^2 \left(\frac{t'r - 2ss' + r't}{2(rt - s^2)}\right)^2 - \frac{K_1^4}{rt - s^2}\right\}}$$

Ora dai valori di $p, q, r, s, t$ avuti dalle formule (100) e (102) si ha

Digitized by Google

$$(110)\begin{cases} t'r-2s\,s'+r't=-\dfrac{c^4}{a^2b^2z^3}\left((a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)\right) \\ K_1=\sqrt{1+p^2+q^2}=\dfrac{c^2}{z}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}} \\ rt-s^2=\dfrac{c^4}{a^2\,b^2\,z^3}\cdot\dfrac{c^2}{z} \end{cases}$$

Sostituiti questi valore nell' equazione (109) e ponendo per brevità

$$(111)\quad a^2+b^2+c^2=u^2\quad,\quad x^2+y^2+z^2=v^2$$

si arriva in fine all' espressione

$$(112)\quad \rho_0=K\left\{\frac{u^2-v^2}{2}\pm\sqrt{\left\{\left(\frac{u^2-v^2}{2}\right)^2-a^2b^2c^2\,.\,K^2\right\}}\right\}$$

purchè in luogo di $K$ s' intenda sostituito il valore avuto dalla formula (103).

Dall' equazione (112) si hanno i due raggi di curvatura principale sotto una forma semplicissima facendo uso delle seguenti riflessioni. Si conduca per il centro dell'ellissoide un piano parallelo a quello tangente al punto $x, y, z$ ; sarà questa diametrale con l'asse $v$ , quindi chiamato $v'$ $v''$ , i due semiassi principali di questa sezione paralleli alle rette tangenti le sezioni di massima , e minima curvatura ; ed $h$ la perpendicolare calata dal centro sul piano tangente , dovrà verificarsi per le proprietà cognite delle superficie del secondo grado

$$(113)\,v^2+v'^2+v''^2=a^2+b^2+c^2=u^2,a^2b^2c^2=v'^2v''^2h^2$$

Digitized by Google

Di più sostituiti nella formula (3) i valori di $p$ $q$ presi dalle (100), l'equazione del piano tangente diviene

$$(114) \qquad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1$$

d'onde la perpendicolare $h$ si esprime con

$$(115) \quad h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{1}{K},$$

perciò avremo

$$(116) \qquad u^2 - v^2 = v'^2 + v''^2 \;,\; K = \frac{1}{h}$$

e la (112) si trasforma in

$$(117) \quad \begin{cases} \rho_0 = \frac{1}{h}\left\{\frac{v'^2 + v''^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{v'^2 + v''^2}{2}\right)^2 - v'^2 v''^2}\right\} \\ = \frac{1}{h}\left\{\frac{v'^2 + v''^2 \pm (v'^2 - v''^2)}{2}\right\} \end{cases}$$

ed i raggi $\rho_1$, $\rho^2$ di curvatura principale saranno evidentemente

$$(118) \qquad \rho_1 = \frac{v'^2}{h} \;,\; \rho^2 = \frac{a''^2}{h}$$

Espressioni della massima semplicità



Digitized by Google

## *Applicazione della precedente teoria alle linee descritte sulla superficie di un piano.*

1.° Allorchè il piano delle $x\,z$ è parallelo al piano tangente dovrà porsi

$$q = o\,, \quad \text{e} \quad \phi = o$$

e la formula (32) diviene

$$\rho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{r}$$

deve $r$ ricavarsi dalla equazione

$$A + Cp^2 + 2Ep = -Ir$$

ed il valore di $p$ dedurlo dall' equazione $z = f(x)$ della curva, cioè

$$p = -\frac{\cos\lambda}{\cos\nu} = -\frac{G}{I}$$

Tutte quest' equazioni potranno applicarsi evidentemente ad una curva piana qualunque. Noi per semplicità permuteremo le lettere $z$ in $\gamma$, $p$ in $\phi$, $E$ in $B$, $I$ in $H$, $\nu$ in $\mu$; perciò data l'equazione di una curva

(1) $\quad u = o$, ovvero $f(x, \gamma) = o$

la quale risoluta, riguarda ad $\gamma$ dia

(2) $\quad \gamma = f(x)$

Digitized by Google

il suo raggio di curvatura per un punto qualunque è

$$(3) \qquad \rho = \pm \frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{r} \quad (*)$$

---

(*) *Usando di un metodo analogo a quello che si è praticato per le superficie curve non è difficile a dimostrarsi cosa rappresentino* $A$, $B$, $C$, $G$, $H$, $\phi$, $r$ *nel calcolo differenziale*

*Infatti se sia al solito*

$$u = 0, \quad \text{ovvero} \quad f(x,y) = 0$$

*l' equazione della curva, la quale risoluta riguardo ad* $y$ *dia*

$$y = f(x)$$

*si avrebbero le differenze parziali*

$$G = \frac{du}{dx}, \quad H = \frac{du}{dy}$$

$$A = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad B = \frac{d^2u}{dxdy}, \quad C = \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad r = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

*ed infatti ognun conosce, che dal calcolo delle differenze parziali si ha*

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy^2}{dx^2} = 0$$

*la quale non è altro che la nostra*

$$A + 2B\varphi + C\varphi^2 = -Hr$$

Digitized by Google

alla quale dovranno unirsi le seguenti

$$(4)\quad A(X-x)^2+2B(X-x)(Y-y)+C(Y-y)^2=\pm K$$

$$(5)\quad A+2B\varphi+C\varphi^2=-Hr,\quad K=HK'$$

ed anche

$$(6).\quad K=\sqrt{G^2+H^2},\quad K'=-\sqrt{1+\varphi^2}$$

$$(7).\quad \varphi=-\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}=-\frac{G}{H}$$

dove $\varphi$ è la tangente trigonometria dell' angolo che la retta toccante la curva in un punto $x$, $y$ forma con l'asse delle $x$; e $\lambda$, $\mu$ gli angoli che la retta normale al punto di contatto fà con gli assi delle coordinate.

2.° Le coordinate poi $X_1$, $Y_1$ del centro del circolo di raggio $\rho$ si determinano osservando che

$$(8)\quad \rho=\sqrt{(x-X_1)^2+(y-Y_1)^2}$$

e per ipotesi

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{x-X_1}{\varphi}=\dfrac{y-Y_1}{(-1)}=\pm\dfrac{\sqrt{(x-X_1)^2+(y-Y_1)^2}}{\sqrt{1+\varphi^2}} \\ \qquad\qquad =\pm\dfrac{\rho}{\sqrt{1+\varphi^2}} \end{cases}$$

d'onde

$$(10).\quad x-X_1=\frac{\varphi(1+\varphi^2)}{r},\quad y-Y_1=-\frac{(1+\varphi^2)}{r}$$

Se col sussidio di queste due equazioni e con il valore della $y$ dedotta dalle (2) si elimini la $x$ avre-

Digitized by Google

mo una equazione tra $X_1$, $Y_1$ appartenente ad una nuova curva formata dai centri dei circoli osculatori. Questa curva chiamasi *curva evoluta* della prima.

3.° Facciamo anche qui un applicazione analoga alle precedenti. Fatto come sopra $B = o$, lo che si può sempre supporre, e che i coefficienti $A$, $C$ sieno quantità costanti, e che il binomio $Ax^2 + Cy^2$ uguagli parimenti una quantità costante, che noi porremo essere l'unità. In questo caso l'equazione

$$Ax^2 + Cy^2 = 1$$

appartiene ad un ellissi, nella quale chiamati $a$, $b$ i seniassi principali si hà

$$(11) \quad A = \frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}$$

e quindi l'equazione (1) sarà

$$(12). \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ora in un ellissi della forma (12) è

$$(13) \quad \phi = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2}} = -\frac{G}{H}$$

e per conseguenza potremo stabilire

$$(14). \quad G = \frac{x}{a^2}, \quad H = \frac{y}{b^2}$$

e la prima delle (5) si trasforma in

Digitized by Google

$$(15) \qquad r = \frac{A + C\Phi^2}{-H} = -\frac{(a^2y^2 + b^2x^2)b^2}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

Sostituiti questi valori nella formula (3) ed attenendoci al segno —, essendo negativo il valore di $r$ si ottiene

$$(16). \qquad \rho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

Tale è il raggio del circolo osculatore sì nell' ellissi, che nell' iperbole, mentre mutando la $b^2$ in $-b^2$ si hà sempre $(-b^2)^2 = b^4$. L'espressione (16) del raggio di curvatura per un punto qualunque dell' ellissi, e dell' iperbole si può rappresentare sotto una forma semplicissima facendo uso del seguente ragionamento.

Chiamando $X$, $Y$ le coordinate di un punto qualunque di una retta tangente la ellissi in un punto $(x, y)$ avremo per equazione di essa

$$(17). \qquad \frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1$$

Conducendo ora dal centro della curva una perpendicolare, sulla direzione della medesima retta tangente si hà

$$(18) \qquad h = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}}$$

e chiamando eziandio $a'$ un semidiametro parallelo alla tangente; dovrà essere per le proprietà delle linee del secondo grado

Digitized by Google

(19) . $a^2 b' = a'^2 h^2$

Con questi valori la (16) si cangia in

(20) . $\rho = \frac{a'^2}{h}$

Espressione già cognita nella geometria descrittiva. e di tutta la semplicità.

La medesima formula (16) si adatta per una parabola dell'equazione

(21) $y^2 = p\,x$

purchè trasportando l'origine dal centro al vertice si ponga $a = \infty$; sostituito pertanto nella (16) $a - x$ in luogo della $x$ si hà

(22) . $\rho = \frac{(a^4 y^2 + b^4 (a-x)^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$

e facendo

(23) $p = \frac{2 b^2}{a}$

e quindi introdotta la condizione $a = \infty$ viene in fine

(24) $\rho = \frac{(4 p x + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2 p^2}$

nella quale

(25) $\varphi = \frac{p}{2 y}$ , $r = -\frac{p^2}{4 y^3}$

4.° Sarà ora facile il calcolare l'equazioni per l'evoluta sì dell' ellissi, che della parabola. Infatti

Digitized by Google

sostituendo nelle (10) i valori di $\varphi$, ed $r$ espressi dalle formule (13), e (15) si avrà

$$(26)\quad \begin{cases} x - X_1 = \dfrac{x}{a^4 b^2}\,(a^4 y^2 + b^4 x^2) \\ y - Y_1 = \dfrac{y}{b^4 a^2}\,(a^4 y^2 + b^4 x^2) \end{cases}$$

quindi sostituito in queste due il valore della $y$ ricavato dalla (12), e ponendo per brevità

$$(27)\qquad a^2 - b^2 = c^2$$

si deduce

$$(28)\qquad X_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}\,,\; Y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4}$$

dalle quali

$$(29)\qquad \frac{a X_1}{c^2} = \frac{x^3}{a^3}\,,\quad \frac{b Y_1}{c^2} = -\frac{y^3}{b^3}$$

e per conseguenza

$$(30)\,.\quad \left(\frac{a X_1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b Y_1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

dunque in forza dell' equazione (12) dell' ellissi ha semplicemente

$$(31)\,.\qquad \left(\frac{aX_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{bY_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Tal'è l' equazione alla evoluta dell' ellissi e di forma molto simmetrica.

Digitized by Google

Riguardo poi all'evoluta della parabola sostituendo nelle medesime equazioni (10) i valori di $\varphi$, ed $r$ espressi per le (25), divengono quelle

$$(32)\ .\ \begin{cases} x - X_1 = -\frac{2y^2}{p} - \frac{p}{2} = -2x - \frac{p}{2} \\ y - Y_1 = \frac{4y^3}{p^2} + y \end{cases}$$

dalle quali facilmente si ricava

$$(33)\ .\ x = \frac{1}{3}\left(X_1 - \frac{p}{2}\right)\ ,\quad Y_1^2 = \frac{16x^3}{p}$$

dunque finalmente

$$(34)\ .\ Y_1^2 = \frac{16}{27p}\left(X_1 - \frac{p}{2}\right)^3$$

Tal' è l' equazione all' evolutà della parabola e suol chiamarsi *parabola cubica.*

5.° Qui termino di fare ogni altra applicazione, mentre come già ho avvertito, la teorica dei raggi di curvatura sì delle linee, che delle superficie, è di assoluto dominio del calcolo differenziale; dall'altro canto poi nulla, o poco gioverebbe di servirsi di metodi indiretti per arrivare a scoprire le affezioni delle linee, e delle superficie conoscendosene quelli, i quali con tutta la generalità desiderabile ci conducono alla cognizione delle dette proprietà. Contuttociò servirà per vedere fino a dove può arrivare l'applicazione dell' algebra alla geometria, e potrà il presente articolo far serie nell'un altro mio articolo *sulle superficie circoscritte* inserito nel tomo 57 del medesimo giornale. In fine non devo omettere, che nell'

Digitized by Google

esporre queste ricerche ho profittato di quello, che già aveano analogamente scritto, il Sig. Dupin nell' opera citata *Développements de Géometrie*, ed il Sig. Cauchy in sua opera, che questo gran geometra ha pubblicato sotto il titolo di *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie.*

Barnaba Tortolini

Digitized by Google

*ARTICOLO*

## ESTRATTO DAL GIORNALE ARCADICO

NEL TOM. LIX.

Digitized by Google

Digitized by Google

# ANALISI SOPRA ALCUNE QUESTIONI DI FISICO - MATEMATICA

*Equazioni differenziali del movimento di un sistema di molecole sollecitate da forze di attrazione, o ripulzione vicendevole; ed applicazione delle medesime all' oscillazioni di un sistema lineare di corpi.*

1.° L'equazioni differenziali del movimento di un sistema di molecole sollecitate da forze di attrazioni, o ripulzioni vicendevoli si applicano con gran successo per la risoluzione di un gran numero di problemi riguardanti i fenomeni della natura, e specialmente quei del suono, e della luce. Si fatte equazioni con una moltitudine di applicazioni si trovano in diversi luoghi dell' opere dell' illustre sig. Cauchy (*), e sono state da esso date per la prima volta. Pertanto non è mio scopo di entrare nelle sublimi ricerche di questo gran geometra, voglio bensì brevemente dimostrare un facil metodo, onde passare dall' equazioni generali sta-

(*) Exercices des Mathematiques tom. 3, 1828.
tom. 4, 1829.
Memoire sur la dispersion de la lumiere 1830.



Digitized by Google

bilite dal sudetto geometra al caso particolare in cui si considerino i corpi disposti in una data linea, quale è stato con tanta profondità esaminato dal celebre Lagrange (*). Non sarà dunque del tutto inutile se riporterò in poche parole le dette equazioni differenziali, che serviranno di base per il proposto fine.

2.° Abbiasi un numero qualunque di molecole, o punti materiali posti nello spazio, e sollecitati da forze di attrazioni, o ripulsioni vicendevoli. Sieno, $\mu$ la massa di una di queste molecole, ed $m$, $m'$, $m''$... le masse dell' altre, e per ipotesi $a$, $b$, $c$ le coordinate della massa $\mu$ nello stato di equilibrio, riferendo il sistema a tre assi ortogonali delle $x$, $y$, $z$; denotiamo con $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$, le coordinate di un altra molecola $m$, $r$ la distanza tra $\mu$ ed $m$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gli angoli, che il raggio vettore $r$ forma con gli assi delle coordinate. Supponendo, che la forza di attrazione, o ripulsione vicendevole delle due masse $\mu$ ed $m$ sia proporzionale a queste masse, e ad un funzione qualunque della distanza $r$, si potrà rappresentare per il prodotto

$$(1) \qquad \mu m f(r)$$

Le risultanti dell' attrazioni, o ripulsioni vicendevoli sulla massa $\mu$ dell' altre $m$, $m'$, $m''$ parallele ai tre assi ortogonali saranno

$$(2) \quad \mu S.[m \cos \alpha f(r)],\ \mu S.[m \cos \beta f(r)],\ \mu S.[m \cos \gamma f(r)]$$

Il simbolo $S.$ indica una somma di termini simili re-

(*) Lagrange Meca. Anal. tom I° pag.

Digitized by Google

lativi alle diverse molecole $m$, $m'$, $m''$ ed essendo per ipotesi il sistema in equilibrio si avrà generalmente

$$(3)\quad \begin{cases} \mu S.\,[m\cos\alpha f(r)] = o\ ,\ \mu S.\,[m\cos\beta f(r)] = o \\ \mu S.\,[m\cos\gamma f(r)] = o \end{cases}$$

Di più le quantità $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$, sono date dalle formule

$$(4)\quad \Delta a = r\cos\alpha\ ,\ \Delta b = r\cos\beta\ ,\ \Delta c = r\cos\gamma$$

Supponiamo ora, che venga turbato l'equilibrio, e che le molecole $m$, $m'$, $m''$, oscillino in modo, che la distanza tra le due $\mu$, ed $m$ vari in un rapporto poco differente dall'unità. Sieno $\xi$, $\eta$, $\zeta$ li scostamenti piccolissimi, e paralleli agli assi delle coordinate, ed $x$, $y$, $z$ $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ le coordinate delle stesse molecole nello stato di movimento ed $r(1+\varepsilon)$ la nuova distanza, $\varepsilon$ essendo la variazione lineare piccolissima e si avrà evidentemente

$$(5)\quad x = a+\xi\ ,\ y = b+\eta\ ,\ z = c+\zeta$$

e quindi

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta x = \Delta a + \Delta\xi = r\cos\alpha + \Delta\xi \\ \Delta y = \Delta b + \Delta\eta = r\cos\beta + \Delta\eta \\ \Delta z = \Delta c + \Delta\zeta = r\cos\gamma + \Delta\zeta \end{cases}$$

ed anche

$$(7)\quad \begin{cases} r(1+\varepsilon) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \\ = \sqrt{[(r\cos\alpha+\Delta\xi)^2 + (r\cos\beta+\Delta\eta)^2 + (r\cos\gamma+\Delta\zeta)^2]} \end{cases}$$



Digitized by Google

I coseni degli angoli, che la distanza $r\ (1+\varepsilon)$ forma con gli assi delle coordinate si esprimono per

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{r(1+\varepsilon)} = \dfrac{\cos\alpha + \frac{\Delta\xi}{r}}{1+\varepsilon} \\ \dfrac{\Delta y}{r(1+\varepsilon)} = \dfrac{\cos\beta + \frac{\Delta\eta}{r}}{1+\varepsilon} \\ \dfrac{\Delta z}{r(1+\varepsilon)} = \dfrac{\cos\gamma + \frac{\Delta\zeta}{r}}{1+\varepsilon} \end{cases}$$

e per conseguenza le somme delle forze motrici componenti parallele ai tre assi sono

$$(9)\quad \begin{cases} \mu S.[m\dfrac{f[r(1+\varepsilon)]}{r(1+\varepsilon)}\Delta x], \ \mu S.[m\dfrac{f[r(1+\varepsilon)]}{r(1+\varepsilon)}\Delta y] \\ \mu S.[m\dfrac{f[r(1+\varepsilon)]}{r(1+\varepsilon)}\Delta z] \end{cases}$$

Dall' altra parte le forze acceleratrici si esprimono per

$$\frac{d^2\xi}{dt^2},\ \frac{d^2\eta}{dt^2},\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

Dunque se il moto è dovuto soltanto all' azione molecolare avremo dalle formule (9)

Digitized by Google

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = S.[m\left(\cos\alpha + \dfrac{\Delta\xi}{r}\right)\dfrac{f[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}] \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = S.[m\left(\cos\beta + \dfrac{\Delta\eta}{r}\right)\dfrac{f[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}] \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = S.[m\left(\cos\gamma + \dfrac{\Delta\zeta}{r}\right)\dfrac{f[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}] \end{cases}$$

Tali sono l'equazioni differenziali date dal chiar.° sig. Cauchy per rappresentare il movimento di un sistema di molecole sollecitate da forze di attrazione, o ripulsion vicendevole.

3.° Importa molto il conoscere la forma delle precedenti equazioni supponendo, che le oscillazioni attorno i loro punti d'equilibrio sieno piccolissime. Sviluppata l'equazione (7) e computando soltanto le prime potenze di $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, si ricava facilmente

$$(11)\quad \varepsilon = \frac{1}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta + \cos\gamma\,\Delta\zeta)$$

quindi ponendo per brevità

$$(12)\qquad f(r) = r\,f'(r) - f(r)$$

si ricava

$$(13)\qquad \frac{f[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon} = f(r) + \varepsilon f(r)$$

purchè si svolga la funzione fino alla prima potenza di $\varepsilon$; e l'equazioni (10) divengono

Digitized by Google

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = S.[m\dfrac{f(r)}{r}\Delta\xi] + S.[m f(r)\varepsilon\cos\alpha] \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = S.[m\dfrac{f(r)}{r}\Delta\eta] + S.[m f(r)\varepsilon\cos\beta] \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = S.[m\dfrac{f(r)}{r}\Delta\zeta] + S.[m f(r)\varepsilon\cos\gamma] \end{cases}$$

nelle quali sostituendo il valore di $\varepsilon$ datoci dall' equazione (11), e ponendo per brevità

$$(15)\quad \begin{cases} A = \dfrac{f(r) + f(r)\cos^2\alpha}{r}, \quad B = \dfrac{f(r) + f(r)\cos^2\beta}{r} \\ C = \dfrac{f(r) + f(r)\cos^2\gamma}{r} \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} D = \dfrac{f(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}, \quad E = \dfrac{f(r)\cos\alpha\cos\gamma}{r} \\ F = \dfrac{f(r)\cos\beta\cos\gamma}{r} \end{cases}$$

esse si trasformano in

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = S.[m A\Delta\xi] + S.[m D\Delta\eta] + S.[m E\Delta\zeta] \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = S.[m D\Delta\xi] + S.[m B\Delta\eta] + S.[m F\Delta\zeta] \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = S.[m E\Delta\xi] + S.[m F\Delta\eta] + S.[m C\Delta\zeta] \end{cases}$$

Digitized by Google

Anche queste equazioni sono state date dal citato sig. Cauchy (*), e rappresentano il movimento di un sistema di molecole, che sollecitate da forze di attrazione, o ripulsione vicendevole si scostano infinitamente poco dalla posizione d'equilibrio. Non mi fermo nello sviluppo generale di quest' equazioni, che senza dubbio ci condurrebbe a conseguenze importantissime, ma presentemente estranee; esamineremo dunque secondo il propostoci il caso in cui le molecole sieno disposte in una data linea oscillando in virtù di forze qualunque combinate con la loro azione reciproca.

*Modificazioni delle precedenti equazioni nell' ipotesi di un sistema lineare.*

4.° Se le molecole, che compongono il sistema sieno disposte le une riguardo alle altre in un modo uniforme, e regolare potremo esprimere l'equazioni precedenti con i simboli delle differenze finite. Poniamo di passaggio mente al caso in cui le molecole sieno in una data linea oscillando in virtù di forze qualunque combinate con la loro attrazione, o ripulsione reciproca; qual considerazione ci condurrà alle equazioni trovate dal celebre Lagrange.

5.° Rappresentando al solito con $\mu$, la molecola di coordinate $x$, $y$, $z$ nello stato di movimento, avendosi dalle equazioni (5)

$$(18)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

(*) Memoire sur la dispersion de la lumiere 1830. Paris.

Digitized by Google

le formule (10) combinate con le (8) ci porgono

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\mu = \mu\, S.[m\, f[r(1+\varepsilon)]\dfrac{\Delta x}{r(1+\varepsilon)}] \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\mu = \mu\, S.[m\, f[r(1+\varepsilon)]\dfrac{\Delta y}{r(1+\varepsilon)}] \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}\mu = \mu\, S.[m\, f[r(1+\varepsilon)]\dfrac{\Delta z}{r(1+\varepsilon)}] \end{cases}$$

Ora dalla teorica delle differenze finite si sa, che in una serie un termine qualunque eguaglia la differenza dei termini, che lo precedono. Indicate pertanto con

$$_1\Big(\Phi\frac{\Delta x}{r(1+\varepsilon)}\Big),\quad _1\Big(\Phi\frac{\Delta y}{r(1+\varepsilon)}\Big),\quad _1\Big(\Phi\frac{\Delta z}{r(1+\varepsilon)}\Big)$$

le somme dei termini precedenti ai secondi membri dell' equazioni (19), avremo dalle differenze finite

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\mu = \Delta.\,{}_1\Big(\Phi\dfrac{\Delta x}{r(1+\varepsilon)}\Big) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\mu = \Delta.\,{}_1\Big(\Phi\dfrac{\Delta y}{r(1+\varepsilon)}\Big) \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}\mu = \Delta.\,{}_1\Big(\Phi\dfrac{\Delta z}{r(1+\varepsilon)}\Big) \end{cases}$$

dove l'apice a sinistra denota la precedenza dei termini riguardo ai seguenti. Che se oltre l'attrazione, o ripulsione vicendevole sieno applicate tre forze $X, Y, Z$,

Digitized by Google

parallele ai tre assi ortogonali, e la formula differenziale

$$(21) \qquad dV = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

dia le derivate parziali

$$(22) \qquad X = \frac{dV}{dx}, \; Y = \frac{dV}{dy}, \; Z = \frac{dV}{dz}$$

ed abbiasi per mantenere l'uniformità

$$(23) \qquad \mu = \Delta M \; ; \; r(1+\varepsilon) = \Delta s$$

dalle (20) ricaviamo

$$(24) \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\Delta M + \dfrac{dV}{dx}\cdot\Delta M - \Delta\cdot{}_1\left(\Phi\dfrac{\Delta x}{\Delta s}\right) = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\Delta M + \dfrac{dV}{dy}\cdot\Delta M - \Delta\cdot{}_1\left(\Phi\dfrac{\Delta y}{\Delta s}\right) = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}\Delta M + \dfrac{dV}{dz}\cdot\Delta M - \Delta\cdot{}_1\left(\Phi\dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right) = 0 \end{cases}$$

L'equazioni (24) sono precisamente quelle della meccanica analitica (*). Il valore di $\Phi$ è tale, che se il primo ed ultimo corpo sieno in movimento si ha $\Phi_0 = 0$, $\Phi_n = 0$.

6.° In un modo del tutto analogo al precedente si può dimostrare cosa divengano l'equazioni di so-

(*) Mec. Ana. tom. I pag. 371.

Digitized by Google

pra nell'ipotesi dell' oscillazioni piccolissime. Infatti se l'equazioni (14) si moltiplichino per $\mu$ esse ci danno

$$(25)\quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2}\mu = \mu S.[m\frac{f(r)}{r}\Delta\xi + m f(r)\,\varepsilon\cos\alpha] \\ \frac{d^2\eta}{dt^2}\mu = \mu S.[m\frac{f(r)}{r}\Delta\eta + m f(r)\,\varepsilon\cos\beta] \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}\mu = \mu S.[m\frac{f(r)}{r}\Delta\zeta + m f(r)\,\varepsilon\cos\gamma] \end{cases}$$

Indicando dunque con le notazioni

$$(26)\quad \begin{cases} {}_{I}\left(\phi\frac{\Delta\xi}{r} + \downarrow\varepsilon\cos\alpha\right), \quad {}_{I}\left(\phi\frac{\Delta\eta}{r} + \downarrow\varepsilon\cos\beta\right) \\ {}_{I}\left(\phi\frac{\Delta\zeta}{r} + \downarrow\varepsilon\cos\gamma\right) \end{cases}$$

le somme dei termini precedenti ai secondi membri dell' equazioni (25), e ponendo sempre

$$(27)\quad \mu = \Delta M, \quad r = \Delta s, \quad \Delta s = \Delta s\,\downarrow\varepsilon\,\Delta s$$

si trasformeranno in

$$(28)\quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2}\Delta M = \Delta.\,{}_{I}\left(\phi\frac{\Delta\xi}{\Delta s} + \downarrow\varepsilon\cos\alpha\right) \\ \frac{d^2\eta}{dt^2}\Delta M = \Delta.\,{}_{I}\left(\phi\frac{\Delta\eta}{\Delta s} + \downarrow\varepsilon\cos\beta\right) \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}\Delta M = \Delta.\,{}_{I}\left(\phi\frac{\Delta\zeta}{\Delta s} + \downarrow\varepsilon\cos\gamma\right) \end{cases}$$

Digitized by Google

nelle quali però in forza delle formule (12) (23) e (27) tra $\Phi$, $\varphi$, $\downarrow$ si hanno le relazioni

$$(29)\quad \frac{\Phi}{\Delta s} = \frac{\varphi + \varepsilon \downarrow}{\Delta s} = \frac{\varphi + \varepsilon\left(\frac{d\varphi}{d.\Delta s}.\Delta s - \varphi\right)}{\Delta s}$$

quindi ponendo per brevità

$$(30)\quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d.\Delta s}.\Delta s \quad \text{si hà} \quad \downarrow = \varphi' - \varphi$$

d'onde computando soltanto le prime potenze di $\varepsilon$, e ponendo mente alle (27) si deduce dalle (29)

$$(31)\quad \Phi = \varphi + \varepsilon\,\varphi'$$

Che se come al n.° 5° si supponga esservi applicate le forze $X$, $Y$, $Z$; allora sviluppando le formule (22) fino alle prime potenze delle $\xi$, $\eta$, $\zeta$ avremo

$$(32)\quad \begin{cases} \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{da} + \frac{d^2V}{da^2}\xi + \frac{d^2V}{da\,db}\eta + \frac{d^2V}{da\,dc}\zeta \\ \frac{dV}{dy} = \frac{dV}{db} + \frac{d^2V}{da\,db}\xi + \frac{d^2V}{db^2}\eta + \frac{d^2V}{db\,dc}\zeta \\ \frac{dV}{dz} = \frac{dV}{dc} + \frac{d^2V}{da\,dc}\xi + \frac{d^2V}{db\,dc}\eta + \frac{d^2V}{dc^2}\zeta \end{cases}$$

ritenendo, che $a$, $b$, $c$ sieno le coordinate di $\mu$ nello stato d'equilibrio; quindi combinando l'equazioni (24) con le (28), ed osservando, che le condizioni d'equilibrio devono verificare le

Digitized by Google

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{da}\Delta M = \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta x}{\Delta\varsigma}\right) \\ \dfrac{dV}{db}\Delta M = \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta y}{\Delta\varsigma}\right) \\ \dfrac{dV}{dc}\Delta M = \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta z}{\Delta\varsigma}\right) \end{cases}$$

dedurremo le tre

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2}\Delta M + \left(\dfrac{d^2V}{da^2}\xi + \dfrac{d^2V}{da\,db}\eta + \dfrac{d^2V}{da\,dc}\zeta\right)\Delta M \\ \qquad - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta\xi}{\Delta\varsigma} + \psi\varepsilon\cos\alpha\right) = 0 \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\Delta M + \left(\dfrac{d^2V}{da\,db}\xi + \dfrac{d^2V}{db^2}\eta + \dfrac{d^2V}{db\,dc}\zeta\right)\Delta M \\ \qquad - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta\eta}{\Delta\varsigma} + \psi\varepsilon\cos\beta\right) = 0 \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\Delta M + \left(\dfrac{d^2V}{da\,dc}\xi + \dfrac{d^2V}{db\,dc}\eta + \dfrac{d^2V}{dc^2}\zeta\right)\Delta M \\ \qquad - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta\zeta}{\Delta\varsigma} + \psi\varepsilon\cos\gamma\right) = 0 \end{cases}$$

Quest' equazioni coincidono con quelle di Lagrange (*),

(*) Mec. Ana. tom. I° pag. 373.

Digitized by Google

purchè in luogo di $\varepsilon$ si sostituisca il suo valore espresso, in virtù della formula (11), per

$$(35) \qquad \varepsilon = \frac{\Delta a}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta \xi}{\Delta s} + \frac{\Delta b}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta \eta}{\Delta s} + \frac{\Delta c}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta \zeta}{\Delta s}$$

7.° Non è mio fine di esporre in questo luogo il metodo generale dato dal medesimo geometra per l'integrazione dell' equazioni (34): avvertirò soltanto sulle sue tracce, che nell' ipotesi che i corpi sieno posti in linea retta nello stato di equilibrio, qual retta si può prendere per asse delle $x$; le altre coordinate $y$, $z$ si annulleranno, non che le forze a quest' asse perpendicolari, ed avremo

$$\Delta a = \Delta s \quad , \quad \Delta b = o \quad , \quad \Delta c = o \quad , \text{ ed anche}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \xi}{\Delta s}, \downarrow = \varphi' - \varphi, \quad \frac{dV}{db} = o, \quad \frac{dV}{dc} = o$$

e le (34) si trasformano in

$$(36) \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2}\Delta M + \dfrac{d^2V}{da^2}\Delta M - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi'\dfrac{\Delta\xi}{\Delta s}\right) = o \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\Delta M - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta\eta}{\Delta s}\right) = o \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\Delta M - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta\zeta}{\Delta s}\right) = o \end{cases}$$

Che se si supponga nulla qualunque forza estranea si avrà semplicemente

Digitized by Google

$$(37)\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2}\Delta M - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi'\dfrac{\Delta\xi}{\Delta s}\right) = 0 \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\Delta M - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta\eta}{\Delta s}\right) = 0 \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\Delta M - \Delta_{\cdot 1}\left(\varphi\dfrac{\Delta\zeta}{\Delta s}\right) = 0 \end{cases}$$

Se il numero dei corpi cresca indefinitamente diminuendosi la loro grandezza per tutti eguale, e le $\varphi$, $\varphi'$ sieno costanti per tutte le molecole: in questo caso dalle differenze potremo passare ai differenziali, e chiamando M la massa di tutti i corpi, ed $l$ la lunghezza della retta fissa in due estremità nelle quali trovansi i medesimi nello stato di equilibrio, si avrà

$$(38) \qquad ds = dx \quad , \quad dM = \frac{M\,dx}{l}$$

e le (37) divengono

$$(39)\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \dfrac{\varphi' l}{M}\cdot\dfrac{d^2\xi}{da^2} = 0 \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{\varphi l}{M}\cdot\dfrac{d^2\eta}{da^2} = 0 \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \dfrac{\varphi l}{M}\cdot\dfrac{d^2\zeta}{da^2} = 0 \end{cases}$$

Digitized by Google

avendo tolto l'apice a sinistra, che in questo caso non influisce. Quest' equazioni risolvono il problema sulle vibrazioni delle corde sonore riguardate qual corde tese, e caricate di un' infinità di piccoli pesi infinitamente vicini gli uni agli altri. Che se di più si ponga

$$(40) \qquad h = \sqrt{\frac{\varphi}{l\,M}} \quad , \quad h' = \sqrt{\frac{\varphi'}{l\,M}}$$

le (39) si trasformano in

$$(41) \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = l^2 h'^2 \cdot \dfrac{d^2\xi}{da^2} \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = l^2 h^2 \cdot \dfrac{d^2\eta}{da^2} \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = l^2 h^2 \cdot \dfrac{d^2\zeta}{da^2} \end{cases}$$

Le forze $\varphi$, $\varphi'$ rappresentano l'una la tensione della corda nello stato di equilibrio, e l'altra un peso costante, e dato dipendente dalla materia, e grossezza della corda. La prima delle equazioni (41) ci fa conoscere le vibrazioni *longitudinali*, le altre due poi le vibrazioni *trasversali*, quali sono le medesime sì nel senso delle $\gamma$, che delle $z$. Per lo sviluppo completo di questo problema veggasi la meccanica analitica (*), ad anche la meccanica del sig.

(*) Mecc. An. tom. I° pag. 398. e suiv.

Digitized by Google

Poisson (*). L'equazioni superiori coincideranno con quelle di quest' ultimo geometra, purchè nominando $g$ la gravità si esprima il peso della corda per mezzo dell' equazione

$$p = g\,M \tag{42}$$

BARNABA TORTOLINI.

---

(*) Traite de Mec. tom, II° pag. 292, e suiv. edit. 2.

---

# ARTICOLO

ESTRATTO DAL GIORNALE ARCADICO

TOM. LXII.

Digitized by Google

*Sopra un corso di matematiche intitolato*-Elementorum matheseos etc.... auctore Andrea Caraffa e societate Jesu in collegio romano matheseos professore; *e sopra la versione italiana di questi elementi fatta con moltissime annotazioni dal prof. Paolo Volpicelli.*

---

Un corso completo di matematiche pure che dall'aritmetica procedesse alle più elevate dottrine del calcolo così detto sublime, e che fosse compilato sopra le più generali e rigorose teoriche della scienza, era per la Italia da desiderarsi. Un corso che in se riunisse queste condizioni, era un bisogno e un desiderio generale di tutti coloro, i quali si danno allo studio delle scienze esatte; e la mancanza di esso formava un vuoto considerabile nel tesoro delle produzioni scientifiche italiane. Non può negarsi che parecchie sono le istituzioni di matematiche pure, pubblicate in Italia, che più o meno tutte contengono delle parti esposte completamente sotto qualunque aspetto; ma giovi ripeterlo, un corso tutto basato sul più esatto, sul più generale, sul più analitico, e sul più moderno della scienza,

Digitized by Google

desideravasi ancora; quando non ha guari comparvero alla luce gli elementi di matematica del p. Andrea Caraffa della compagnia di Gesù, professore di matematica sublime nel collegio romano ; e noi vedemmo con piacere grandissimo quest' opera soddisfare in tutte le sue parti a quanto si desiderava. Strettissimo vi si ravvisa il concatenamento delle idee , somma la precisione ed esattezza dei metodi; nè mai alle formole si dà quella estensione che loro non si appartiene. Pur troppo non poche formole soglionsi estendere comunemente oltre i dovuti limiti , le quali tuttavia non valgono se non sotto certe condizioni , se non in riguardo a certi valori delle quantità che racchiudono! Gli elementi suddetti sono scritti in idioma latino; e sebbene da taluno sia disapprovato il valersi nelle opere scientifiche di questo linguaggio, perchè non vivente ; pure noi crediamo che nelle matematiche non debba incontrarsi tale disapprovazione; e sol ben cognite alcune opere recentemente pubblicate in idioma latino da diversi distintissimi geometri, nelle quali , oltre la profondità delle dottrine ivi espresse, si scorge ancora eleganza e concisione di termini, proprietà tutte dell'idioma de'padri nostri: talchè l'uso di esso in questa scienza invece d'inceppare, come avverrebbe in altre, le serve di ornamento, e le procura quella maestà e decoro che hanno le dotte lingue in gran parte perchè più non vivono; tutto essendo al di là della tomba sacro ed orrevole.

Gli elementi, di cui parliamo, si dividono in tre parti corrispondenti a tre volumi. Contiene il primo l'aritmetica generalmente dimostrata in tutte le sue parti, e l'algebra, che oltre alle più elemen-

tari sue nozioni abbraccia eziandio le combinazioni e permutazioni, la risoluzione delle equazioni determinate ed indeterminate, le principali proprietà dei numeri, le quantità medie, i logaritmi, la soluzione dei problemi, la dottrina delle probabilità, le serie sì reali e sì immaginarie, la convergenza e divergenza delle medesime, lo sviluppo delle funzioni in serie, le quantità infinitesime, e le frazioni continue. Il secondo volume, senza trascurare del tutto i luminosi metodi degli antichi geometri, giunge alle due trigonometrie piana e sferica. Quivi si stabiliscono parecchie formole e serie trigonometriche, e poi si applica di proposito l'analisi alla geometria di due e tre dimenzioni. Nel terzo finalmente si contengono i due calcoli differenziale ed integrale, con le varie loro applicazioni alla geometria; vi si espone altresì il nuovo calcolo dei residui, e quello delle differenze finite, coi principali usi loro. Con questi tre volumi si ha da un geometra italiano tutto un corso di matematiche pure, che può completamente istituire chicchessia nelle medesime.

Il primo volume di questo corso matematico è stato pubblicato in italiano dal chiarissimo professore Paolo dott. Volpicelli, e da esso dichiarato con moltissime annotazioni per maggior comodo di coloro che debbono o vogliono con esso istituirsi. Questa traduzione fu eseguita dal lodato professore Volpicelli con molt'accuratezza, e risplende in essa la eleganza e la precisione stessa che trovasi nel testo latino. Il medesimo professore, avendo ben penetrato l'originale, ha corredate le materie in esso contenute di dotte annotazioni, le quali facilitano l'intendimento dell'opera; e noi siamo di av-

Digitized by Google

viso, che la traduzione con simili annotazioni degli altri due volumi sarà di una utilità grande per quelli che vogliono penetrare nei segreti arcani delle scienze matematiche, e renderà l'opera del Caraffa superiore a qualunque elogio. Per questa traduzione sono state aperte le associazioni, che si ricevono in Roma nella tipografia Puccinelli in via della Valle N. 53, e nella libreria nuova di Giovanni Gallarini sulla piazza di monte citorio N. 19, 20, 21, non che dai principali librai d'Italia. L'acquisto di questa traduzione per gli associati non sorpasserà la spesa di scudi tre, e per maggior comodo dei medesimi, essa verrà in luce e sarà distribuita, non già per fascicoli, come suol farsi comunemente, bensì per volumi, legati alla rustica, e coperti di carta colorata, nella quale sarà stampato il prezzo del volume stesso.

BARNABA TORTOLINI

Estratto dal Giornale Arcadico Tom. 73.

Digitized by Google

6.

# SULLA QUADRATURA
# DELL' ELLISSOIDE
## A TRE ASSI INEGUALI
## *MEMORIA*

DI

**BARNABA TORTOLINI**

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME NELL' UNIVERSITA' ROMANA DELLA SAPIENZA E PROFESSORE DI FISICA NEL COLLEGIO URBANO DI PROPAGANDA FIDE.

*Estratta dal Giornale Arcadico Tomo* 78.

Roma 20 Marzo 1839

Digitized by Google

Digitized by Google

## *Memoria sulla quadratura dell'ellissoide a tre assi ineguali.*

1.° La superficie curva dell' ellissoide a tre assi ineguali dipende, come si sa dallo sviluppo di un integrale doppio preso entro dati limiti. *Legendre*, il quale ha trattato estesamente la risoluzione di questo problema nella sua opera delle funzioni ellittiche, ha provato che la formola, la quale ci dà la superficie totale dell' ellissoide è rappresentata dalle funzioni ellittiche di prima e di seconda specie. L'autore arriva in due modi a questo risultato; il primo dei quali consiste ad esprimere per serie il doppio integrale, e quindi con l'introduzione di un parametro ausiliare prova che il doppio integrale per serie verifica un'equazione differenziale del secondo ordine, dall'integrazione della quale vien fuori il valore della superficie. Il secondo metodo è dato dalla considerazione delle linee di massima e minima curvatura, tracciate sulla superficie dell'ellissoide. Le difficoltà che s'incontrano in questo caso sono dipendenti dalle funzioni ellittiche di terza specie, le quali alcune volte sono esprimibili in funzioni ellittiche di prima e seconda specie. *Legendre*, dopo un complicato giro di analisi, arriva finalmente a dimostrare che la su-



Digitized by Google

perficie curva dell'ellissoide è espressa molto semplicemente da funzioni ellittiche di prima e seconda specie. Lo scopo principale di questa memoria è di far vedere, che il risultato rimarchevole dato da *Legendre* può facilmente rinvenirsi, mettendo a profitto quanto lo stesso *Legendre* dice alla pag.358 vol. I.° delle funzioni ellittiche, e che è relativo al primo metodo da lui usato. In seguito di ciò ho conosciuto una memoria del ch. sig. *Plana* di Torino, riguardante il medesimo oggetto, ed inserita nel tomo 17 del giornale di matematica, pubblicato in Berlino dal sig. *Crelle*. In questo elegante scritto il sig. *Plana* arriva all'importante risultato trovato da *Legendre* per la quadratura dell'ellissoide con principii dedotti dall'opera di *Legendre*: in seguito termina con ricerche analoghe allo stesso soggetto.

Le considerazioni delle quali esse essendo alquanto diverse da quelle di *Legendre* e del sig. *Plana*, penso che non sarà del tutto inutile questa breve memoria per semplificare un'importante applicazione del calcolo integrale, e che riguarda una bella applicazione delle funzioni ellittiche.

2.° Chiamando al solito $x, y, z$ le coordinate rettangolari del punto di una superficie curva qualunque, faremo al solito uso della formola, la quale vien data per la quadratura delle superficie curve, cioè

$$S = \int\int dxdy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

ove $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ sono le derivate parziali dedotte dall'

Digitized by Google

equazione generale delle superficie

$$z = f(x, y)$$

Nel caso di un ellissoide riferita a tre assi principali, $2a$, $2b$, $2c$ paralleli alle coordinate $x, y, z$ dovrà valere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Quest'equazione si suol comunemente verificare con due coordinate polari $p$, $q$; ed a quest'oggetto noi potremo prendere

$$x = a\cos p, y = b\sin p\cos q, z = c\sin p\sin q$$

i quali sostituiti danno evidentemente

$$\cos^2 p + \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q + \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q = 1$$

Gli angoli $p$, $q$ saranno 1.° $p$ l'angolo che una retta fissa forma con l'asse della $x$, 2.° $q$ l'angolo che la proiezione di questa retta nel piano delle $yz$ fa con l'asse delle $x$.

Dalla trasformazione degli integrali doppi dovremo differenziare, $y$ considerando la $x$ come costante, o che torna lo stesso considerandovi $p$ costante: per lo che avremo

$$dx = -a\operatorname{sen} p dp. \quad dy = -b\operatorname{sen} p \operatorname{sen} q dq$$

d'onde

$$dx dy = ab \operatorname{sen} p \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q \, dp dq$$

Differenziando l'equazione dell'ellissoide

$$\frac{dz}{dz} = -\frac{x}{z}\frac{c^2}{a^2} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}\frac{c^2}{b^2}$$

Digitized by Google

quindi elevando al quadrato e sostituendo i valori di $x, y, z$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{c^2\cos^2 p}{a^2\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q}, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{c^2\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q}{b^2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q}$$

delle quali con facilità

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{b^2c^2\cos^2 p + a^2b^2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q + a^2c^2\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q}}{ab\operatorname{sen} p\operatorname{sen} q}$$

e finalmente l'integrale doppio si trasformerà in

$$S = \int\int \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{b^2c^2\cos^2 p + a^2b^2\operatorname{sen}^2 p\operatorname{sen}^2 q + a^2c^2\operatorname{sen}^2 p\cos^2 q}$$

Per estendere alla superficie intera dell'ellissoide questo integrale, basta prendere il valore di $p$ entro i limiti di o, e, $\pi = 180°$, ed il valore dell'angolo $q$ entro i limiti $\pi$, $-\pi$, e perciò facendo per brevità

$$A = b^2c^2, \quad m = a^2c^2, \quad n = a^2b^2$$

$$B = m\cos^2 q + n\operatorname{sen}^2 q$$

si otterrà per l'intera superficie dell'ellissoide ad assi ineguali

$$S = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} p\, dp\, dq \sqrt{A\cos^2 p + B\operatorname{sen}^2 q}$$

Prima di eseguire l'integrazione non sarà inutile di far conoscere il significato geometrico della

Digitized by Google

quantità sotto il vincolo radicale. Chiamando $\rho$ un raggio vettore, che dal centro dell'ellissoide si conduce ad un punto della medesima, si avrà

$$x = \rho cosp,\ y = \rho senpcosq,\ z = \rho senpseng$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{cos^2p}{a^2} + \frac{sen^2pcos^2q}{b^2} + \frac{sen^2psen^2q}{c^2}$$

dalla quale

$$\rho = \frac{abc}{\sqrt{A cos^2p + B sen^2p}}$$

ed allora l'integrale definito doppio si esprimerà molto semplicemente per

$$S = abc \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{senpdpdq}{\rho}$$

Questa coincide con quella data dal sig. *Cauchy* in una memoria litografica in data dei 19 ottobre del 1832. La formola si verifica immediatamente nell' ipotesi di una sfera, mentre allora abbiamo $\rho = a = b = c$, e quindi l'integrale ci porge

$$S = 4\pi\rho^2.$$

3.° Non è difficile però ad arrivare con gli ordinari metodi delle trasformazioni ad un primo integrale relativo alla variabile $p$, considerata $q$ come costante, riducendosi così ad

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} S'dq$$

Digitized by Google

facendo per brevità

$$S' = \int_0^{\pi} senpdp\sqrt{A\cos^2 p + B sen^2 p}$$

A quest'oggetto consideriamo l'integrale indefinito

$$V = \int senpdp\sqrt{A\cos^2 p + B sen^2 p}$$

ove chiamata $v$ una variabile ausiliare si ponga

$$\sqrt{A\cos^2 p + B sen^2 p} = v$$

dalla quale

$$\cos p = \frac{1}{\sqrt{B-A}}\sqrt{B - v^2}$$

e differenziando

$$senpdp = \frac{1}{\sqrt{B-A}} \frac{vdv}{\sqrt{B-v^2}}$$

d'onde sostituendo col porre $e^2 = \frac{1}{B}$ si ricava l'integrale trasformato

$$V = \frac{1}{\sqrt{B(B-A)}} \int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1-e^2v^2}}$$

Dalla cognita teoria delle integrali abbiamo

$$\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1-e^2v^2}} = \frac{v}{2e^2}\sqrt{1-e^2v^2} - \frac{1}{2e^2}\int \frac{dv}{\sqrt{1-e^2v^2}}$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1-e^2v^2}} = \frac{1}{e} \text{Arc}\,(tang = \frac{ev}{\sqrt{1-e^2v^2}})$$

per cui subito si ottiene

Digitized by Google

$$V = \frac{1}{\sqrt{B(B-A)}}\left[\frac{v}{2e^2}\sqrt{1-e^2v^2} - \frac{1}{2e^3}Arc\left(tang = \frac{ev}{\sqrt{1-e^2v^2}}\right)\right].$$

Per avere i valori in A, B, basta richiamare che

$$1-e^2v^2 = 1 - \frac{(A\cos^2 p + B\,sen^2 p)}{B} = \frac{(B-A)\cos^2 p}{B}$$

od anche

$$\sqrt{1-e^2v^2} = \pm\, cosp\sqrt{\frac{B-A}{B}}$$

ove prendendo il segno + dovremo nell' integrale sostituire $p = 0$, $p = 180$, cosicchè risulta

$$V = \tfrac{1}{2}\, cosp\sqrt{A\cos p^2 + B\,sen^2 p}$$

$$-\frac{B}{2\sqrt{B-A}}Arc\left(tang = \frac{\sqrt{A\cos^2 p + B\,sen^2 p}}{cosp\sqrt{B-A}}\right) + C.$$

L'aggiunta della costante si renderebbe inutile qualora si parli dell'integrale definito: pur tuttavia non è difficile la determinazione della medesima. La quantità $2\pi V$ rappresenta la superficie di un ellissoide di rivoluzione di assi 2A, 2B con l'origine al centro, e che all'angolo $p=90°$ corrisponde $V=0$ e sarà

$$0 = -\frac{B}{2\sqrt{B-A}}\,Arc.\left(tang = \frac{\sqrt{B}}{0}\right) + C$$

ossia

$$C = \frac{B}{2\sqrt{B-A}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Avvertendo ora che per valori di $z$ minori di 90°

Digitized by Google

$$\text{Arc.}\left(tang = s\right) + \text{Arc.}\left(tang = \frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2}$$

potremo avere eziandio per l'integrale la formola

$$V = \tfrac{1}{2} cosp\sqrt{A cos^2 p + B sen^2 p}$$

$$+ \frac{B}{2\sqrt{B-A}} \text{Arc.}\left(tang = \frac{cosp\sqrt{B-A}}{\sqrt{A cos^2 p + B sen^2 p}}\right)$$

Ponendo ora successivamente $p = 0$, $p = 180^\circ = \pi$ otteniamo i due integrali

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{B-A}} \text{Arc.}\left(tang = \frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{A}}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}A - \frac{B}{2\sqrt{B-A}} \text{Arc.}\left(tang = \frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{A}}\right)$$

Dalla sottrazione di essi risultando l'integrale definito, sarà per conseguenza

$$S = \int_0^\pi senpdp\sqrt{A cos^2 p + B sen^2 p}$$

$$= \sqrt{A} + \frac{B}{\sqrt{B-A}} \text{Arc.}\left(tang = \frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{A}}\right)$$

Il valore adunque dell'intera superficie dell'ellissoide si esprimerà per l'integrale definito semplice:

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{A}dq + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{B}{\sqrt{B-A}} \text{Arc.}\left(tang = \frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{A}}\right)\right] dq$$

non dovendo perder di vista essere

$$A = b^2c^2, \; m = a^2c^2, \; n = a^2b^2$$

$$B = mcos^2 q + nsen^2 q.$$

Digitized by Google

4.° La nuova integrazione relativa alla variabile $q$ non può farsi che in serie, e non tarderemo a mostrare, che le funzioni ellittiche di prima e seconda specie sono precisamente le serie che rappresentano la superficie dell'ellissoide.

Nel caso di un ellissoide di rivoluzione l'integrazione può facilmente eseguirsi; supponendo 1.° che l'asse di rotazione sia $2a$, e $b=c$, avremo

$$\sqrt{A} = \sqrt{b^4} = b^2,\ B = a^2b^2(cos^2q + sen^2q) = a^2b^2$$

per cui integrando

$$S = 2b^2\pi + \frac{2a^2b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\ Arc\left(tang = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

Questa espressione può mettersi sotto due forme secondo che il semiasse $a$ è maggiore, o minore del semiasse $b$. La ipotesi di $a > b$ dà per l'ellissoide di rivoluzione

$$S = 2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{\varepsilon}\ Arc\left(tang = \frac{a\varepsilon}{b}\right)$$

qualora si ponga

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a\varepsilon$$

Che se anche fosse $b = a$, riuscirà $\varepsilon = 0$; allora per la teoria de'limiti

$$lim.\ \frac{1}{\varepsilon}\ Arc\left(tang = \frac{a\varepsilon}{b}\right) = 1$$

e viene al solito per la superficie della sfera

$$S = 4\pi a^2.$$

Sia 2.° $2b$ l'asse di rivoluzione; ponendo in questo

Digitized by Google

caso

$$\sqrt{b^2 - a^2} = bc$$

avremo

$$S = 2b^2\pi + \frac{2a^2\pi}{\varepsilon\sqrt{-1}} \operatorname{Arc}(tang = \varepsilon\sqrt{-1})$$

ma sappiamo che

$$\operatorname{Arc}(tang = \varepsilon\sqrt{-1}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} log\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

dunque sostituendo

$$S = 2b^2\pi + \frac{a^2\pi}{\varepsilon} log\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

ove i logaritmi sono della base iperbolica $e$.

Qui pure l'ipotesi di $b = a$ rende $\varepsilon = 0$; d' altronde dai limiti abbiamo che

$$lim.log\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = lim\ log\,(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = log\ e = 1;$$

ossia

$$lim\ \frac{1}{\varepsilon}\ log\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) = 2$$

e verrà al solito per la sfera

$$S = 4\pi a^2.$$

5.° Passiamo ora a dimostrare che l'integrale relativo a $q$ verifica una certa equazione differenziale del second'ordine, dall'integrazione della quale si ottiene il valore della superficie S.

Primieramente ci sarà utile di trasformare in logaritmi l'arco dato per la tangente; ed a questo fine porremo

Digitized by Google

$$L = \frac{A - B}{A}$$

dalla quale facilmente

$$B = A(1 - L), \quad \sqrt{\frac{B - A}{A}} = \sqrt{L}\cdot\sqrt{-1}$$

$$\frac{B}{\sqrt{B - A}} = \frac{\sqrt{A(1 - L)}}{\sqrt{L}\sqrt{-1}}$$

che sostituiti nel valore della S nel n.° 3 otteniamo

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{A}\, dq + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{A(1 - L)}}{\sqrt{L}\cdot\sqrt{-1}} Arc(tang = \sqrt{L}\cdot\sqrt{-1}) dq$$

e siccome

$$Arc(tang = \sqrt{L}\cdot\sqrt{-1}) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} log \left( \frac{1 - \sqrt{L}}{1 + \sqrt{L}} \right)$$

perciò risulterà

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{A} dq + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{A}.(1 - L)}{2\sqrt{L}} log \left( \frac{1 + \sqrt{L}}{1 - \sqrt{L}} \right) dq$$

ove ponendo per brevità

$$Q = \sqrt{A} + \frac{\sqrt{A}.(1 - L)}{2\sqrt{L}} log \left( \frac{1 + \sqrt{L}}{1 - \sqrt{L}} \right)$$

avremo anche semplicemente

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} Q dq .$$

La quantità denotata con la lettera Q può svilupparsi in serie per mezzo della nota formola logaritmica

Digitized by Google

$$log\left(\frac{1+\sqrt{L}}{1-\sqrt{L}}\right)=2\left(\sqrt{L}+\frac{\sqrt{L^3}}{3}+\frac{\sqrt{L^5}}{5}+\frac{\sqrt{L^7}}{7}+\right)$$

Questa moltiplicata per $\frac{1-L}{2\sqrt{L}}$ ci darà dopo facile riduzione

$$Q=2\sqrt{A}\left(1-\frac{L}{3}-\frac{L^2}{3.5}-\frac{L^3}{5.7}-\frac{L^4}{7.9}-\right)$$

Il problema sarebbe ridotto pertanto alla ricerca dell'integrale definito $\int_{-\pi}^{\pi} L^m dq$, del quale la determinazione non ammette grande difficoltà; ma non essendo questo il nostro primario scopo, andiamo a trattare la questione sotto un altro punto di vista.

6.° Alla serie della Q del numero antecedente, ed ordinata secondo le potenze della L, si rimpiazzi la seguente ordinata per le potenze impari di una quantità, $\gamma$ vale a dire

$$Y=2\sqrt{A}\left(\gamma-\frac{L\gamma^3}{3}-\frac{L^2\gamma^5}{3.5}-\frac{L^3\gamma^7}{5.7}-\frac{L^4\gamma^9}{7.9}-\right)$$

che si riduce per $\gamma=1$ ad $Y=Q$, e si annullerà per $\gamma=0$. Ciò posto, differenziando due volte rapporto alla $\gamma$, e dividendo per $d\gamma$, ricaviamo evidentemente

$$\frac{dY}{d\gamma}=2\sqrt{A}\left(1-L\gamma^2-\frac{L^2\gamma^4}{3}-\frac{L^3\gamma^6}{5}-\frac{L^4\gamma^8}{7}-\right)$$

$$\frac{d^2Y}{d\gamma^2}=-2\sqrt{A}\left(2L\gamma+\frac{4L^2\gamma^3}{3}+\frac{6L^3\gamma^5}{5}+\frac{8L^4\gamma^7}{7}+.\right)$$

Digitized by Google

e se quest'ultima si moltiplichi per $\gamma$, e dalla prima si sottragga, avremo ancora

$$\frac{dY}{d\gamma} - \gamma\frac{d^2Y}{d\gamma^2} = 2\sqrt{A}(1 + L\gamma^2 + L^2\gamma^4 + L^3\gamma^6 + L^4\gamma^8 + \ldots)$$

E siccome la serie

$$1 + L\gamma^2 + L^2\gamma^4 + L^3\gamma^6 + L^4\gamma^8 + \ldots = \frac{1}{1 - L\gamma^2}$$

così la quantità Y verificherà l'equazione differenziale

$$\frac{dY}{d\gamma} - \gamma\frac{d^2Y}{d\gamma^2} = \frac{2\sqrt{A}}{1 - L\gamma^2}$$

moltiplicando quest'ultima per $dq$, ed integrando entro i limiti $q = \pi$, $q = -\pi$, sarà

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dY}{d\gamma}dq - \int_{-\pi}^{\pi}\gamma\frac{d^2Y}{d\gamma^2}dq = 2\sqrt{A}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dq}{1 - L\gamma^2}.$$

Dalla sola ispezione di questa equazione è facile il dedurre, che l'integrale definito

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} Q dq$$

verificherà l'equazione differenziale del second'ordine

$$\frac{dS}{d\gamma} - \gamma\frac{d^2S}{d\gamma^2} = 2\sqrt{A}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dq}{1 - L\gamma^2}$$

purchè dopo le integrazioni si faccia $\gamma = 1$, ed abbiasi $S = 0$ per $\gamma = 0$, ed ancora

$$\frac{dS}{d\gamma} = \int_{-\pi}^{\pi} 2\sqrt{A}(1 - L\gamma^2 - \ldots)dq = 4\pi\sqrt{A}$$

per $\gamma = 0$.

Digitized by Google

L'integrale del secondo membro si determina con richiamare il valore delle L in A, B dato dal n.° 2, ove trasformando la potenza seconda del seno e coseno, nel coseno dell'arco doppio si ottiene

$$B = \frac{m + n + (m - n)\cos 2q}{2}$$

ed

$$L = \frac{A - B}{A} = \frac{2A - (m + n) - (m - n)\cos 2q}{2A}$$

quindi

$$\frac{dq}{1 - L\gamma^2} = \frac{2A\,dq}{a_1 + b_1 \cos 2q}$$

$a_1$, $b_1$ si esprimono pur

$$a_1 = 2A(1 - \gamma^2) + (m + n)\gamma^2;\ b_1 = \gamma^2(m - n).$$

D'altronde sappiamo che

$$\int \frac{2dq}{a_1 + b_1 \cos 2q} = \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \text{Arc.} \left( tang = \frac{(a_1 - b_1)\cos q}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \right)$$

e ponendo successivamente $q = 180^\circ = \pi$, e $q = -180^\circ = -\pi$, avremo per risultati, $\pi$, $-\pi$ nel secondo membro di questa ultima equazione: cosicchè

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2dq}{a_1 + b_1 \cos 2q} = \frac{4\pi}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}$$

e per conseguenza

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{1 - L\gamma^2} = \frac{4\pi A}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}$$

Digitized by Google

e l'equazione differenziale del second'ordine diviene

$$\frac{dS}{dy} - \gamma \frac{d^2S}{dy^2} = \frac{8\pi A \sqrt{A}}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}$$

nella quale rimane a conoscersi in funzione della $y$ il radicale $\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$.

7.° I valori di $a_1$, $b_1$ elevati al quadrato ci porgono le formole

$$a_1^2 = 4A^2(1-y^2)^2 + (m+n)^2y^4 + 4A(m+n)(1-y^2)y^2$$

$$b_1^2 = (m-n)^2y^4$$

dalla sottrazione delle quali deduciamo un risultato della forma

$$a_1^2 - b_1^2 = 4A^2[1 - a_2y^2 + b_2y^4]$$

Le nuove quantità $a_2$, $b_2$ sono evidentemente

$$a_2 = \frac{2A - (m+n)}{A}$$

$$b_2 = \frac{mn + A(A - (m+n))}{A^2}$$

sostituendo in queste ultime i valori di A, $m$, $n$ ricaviamo con facilità

$$a_2 = \frac{2b^2c^2 - (a^2c^2 + a^2b^2)}{b^2c^2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2} + \frac{c^2 - a^2}{c^2}$$

$$b_2 = \frac{a^4b^2c^2 + b^2c^2(b^2c^2 - (a^2c^2 + a^2b^2))}{b^4c^4} = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2}$$

e ponendo in fine

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \alpha^2 \quad \frac{c^2 - a^2}{c^2} = \beta^2,$$

sarà

Digitized by Google

$$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad b_2 = \alpha^2\beta^2$$

per cui

$$\sqrt{a_1^2 - b_1^2} = 2bc\mathrm{R}$$

essendo

$$\mathrm{R} = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)y^2 + \alpha^2\beta^2 y^4}$$

e l'equazione differenziale si trasforma in

$$\frac{dS}{dy} - y\frac{d^2S}{dy^2} = \frac{4\pi bc}{\mathrm{R}}$$

Tale è l'equazione differenziale, che integrata ci fa conoscere il valore della superficie S, non dovendoci dimenticare che l'integrale di questa equazione deve verificarsi per $y = 0$ (n.° 6)

$$S = b, \frac{dS}{dy} = 4\pi bc$$

e porre in fine $y = 1$.

8.° Quest'equazione ultima a coefficienti variabili rendesi integrabile col moltiplicare $\frac{1}{y^2}$ dalla quale si ricava

$$\frac{1}{y}\frac{d^2S}{dy^2} - \frac{1}{y^2}\frac{dS}{dy} = -\frac{4\pi bc}{y^2\mathrm{R}}$$

e moltiplicando per $dy$, ed osservando che

$$\frac{1}{y}\frac{dS}{dy} = \int\left(\frac{1}{y}\frac{d^2S}{dy} - \frac{1}{y^2}dS\right)$$

si ottiene un primo integrale

$$\frac{1}{y}\frac{dS}{dy} = -4\pi bc\int\frac{dy}{y^2\mathrm{R}} + \mathrm{C}.$$

Digitized by Google

Essendo C l'arbitraria costante. Ora dal (n.° 6) abbiamo che nella formola

$$\frac{dS}{dy} = \int_{-\pi}^{\pi} 2\sqrt{A}\,(1 + Ly^2 + )\,dq,$$

non si contiene il termine $y$ alla prima potenza, per cui $C = 0$, ed avremo soltanto

$$\frac{dS}{dy} = -4\pi bcy \int \frac{dy}{y^2 R}.$$

Per trasformare l'integrale del secondo membro è utile seguire le orme di *Legendre*, con avvertire che

$$d\,\frac{R}{y} = \frac{y\,dR - R\,dy}{y^2},$$

ove sostituendoci

$$dR = \frac{[2\alpha^2\beta^2 y^3 - (\alpha^2 + \beta^2)y]dy}{R}$$

si ha

$$d.\,\frac{R}{y} = -\frac{dy}{y^2 R} + \frac{y^2\alpha^2\beta^2 dy}{R}$$

e per conseguenza

$$\int \frac{dy}{y^2 R} = -\frac{R}{y} + \alpha^2\beta^2 \int \frac{y^2 dy}{R};$$

ed il rapporto $\frac{dS}{dy}$ diviene

$$\frac{dS}{dy} = 4\pi bcR - 4\pi bc\alpha^2\beta^2 y \int \frac{y^2 dy}{R}.$$

Moltiplicando per $dy$ ed integrando, sarà



Digitized by Google

$$S = \pi bc \left( 4 \int R dy - 2\alpha^2\beta^2 \int 2y dy \int \frac{y^2 dy}{R} \right)$$

Applicandovi il principio dell'integrazione per parti, sarà ancora

$$\int 2y dy \int \frac{y^2 dy}{R} = y^2 \int \frac{y^2 dy}{R} - \int \frac{y^4 dy}{R}$$

per cui

$$S = \pi bc \left( 4 \int R dy - 2\alpha^2\beta^2 y^2 \int \frac{y^2 dy}{R} + 2\alpha^2\beta^2 \int \frac{y^4 dy}{R} \right)$$

e siccome

$$\int R dy = Ry - \int y dR = Ry - 2\alpha^2\beta^2 \int \frac{y^4 dy}{R} + (\alpha^2 + \beta^2) \int \frac{y^2 dy}{R}$$

perciò dedurremo

$$S = 2\pi bc \left( 2Ry + [2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2 y^2] \int \frac{y^2 dy}{R} - 3\alpha^2\beta^2 \int \frac{y^4 dy}{R} \right)$$

Inoltre

$$\int \frac{y^4 dy}{R} = \frac{1}{3\alpha^2\beta^2} Ry + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{3\alpha^2\beta^2} \int \frac{y^2 dy}{R} - \frac{1}{3\alpha^2\beta^2} \int \frac{dy}{R}$$

quindi sostituito dopo facile riduzione verrà semplicemente

$$S = 2\pi bc \left( Ry + \int \frac{dy}{R} - \alpha^2\beta^2 y^2 \int \frac{y^2 dy}{R} \right)$$

9.° Gl' integrali indicati nel secondo membro di questa ultima equazione facilmente si riducono a funzioni ellittiche di prima, e seconda specie; mentre ponendo

$$ay = \operatorname{sen}\varphi$$

Digitized by Google

dalla quale

$$cos\varphi = \sqrt{1 - \alpha^2 y^2},\ dy = \frac{cos\varphi d\varphi}{\alpha},$$

e di più ponendo $\frac{\beta}{\alpha} = k$, supponendo $\beta < \alpha$, risulterà

$$\int \frac{dy}{R} = \int \frac{d\varphi}{\alpha\sqrt{1 - k^2 sen^2\varphi}}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{R} = \int \frac{sen^2\varphi d\varphi}{\alpha^3\sqrt{1 - k^2 sen^2\varphi}}$$

Facendo uso della notazione di Legendre, sarà

$$\int \frac{d}{\sqrt{1 - k^2 sen^2\varphi}} = F(k, \varphi)$$

$$\int d\varphi\sqrt{1 - k^2 sen^2\varphi} = E(k, \varphi),$$

e perciò anche

$$\int \frac{sen^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 sen^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}[F(k, \varphi) - E(k, \varphi)]$$

e gli integrali richiesti si esprimeranno per

$$\int \frac{dy}{R} = \frac{F(k, \varphi)}{\alpha}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{R} = \frac{1}{k^2}\left[\frac{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)}{\alpha^3}\right].$$

Nei termini fuori del vincolo $f$ deve porsi $y = 1$, ed allora

$$R = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2} = \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}$$

od anche per i stabiliti valori di $\alpha^2$, $\beta^2$ si ha

Digitized by Google

$$R = \frac{a^2}{bc}.$$

Sostituendo tutti questi valori, arriviamo all'espressione

$$S = 2\pi a^2 + \frac{2\pi bc}{\alpha}\left((1-\alpha^2)\,F(k,\varphi) + \alpha^2 E\,(k,\varphi)\right).$$

La condizione $y = 1$ ci da

$$\alpha = sen\varphi\,,\ \sqrt{1-\alpha^2} = cos\varphi,$$

e per conseguenza

$$S = 2\pi a^2 + \frac{2\pi bc}{sen\varphi}\left(cos^2\varphi F(k,\varphi) + sen^2\varphi E(k,\varphi)\right),$$

che è conforme a quanto è stato trovato da *Legendre*.

10.° Termineremo la presente memoria con calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi} L^r\, 2dq\,,$$

dal quale conosceremo il valore della S secondo le potenze di $\alpha$, $\beta$. Prendendo l'espressione della L del n.° 5; e sostituiti i valori di A, $m$, $n$, e ponendo anche

$$h = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{(b^2-c^2)}{2b^2c^2};$$

avremo

$$L = (\alpha^2+\beta^2)(1+h\cos 2q).$$

D'altronde sappiamo che

$$\int\left(1+h\cos 2q\right)^r 2dq = 2A_r q + B_r sen2q + \tfrac{1}{2}C_r sen4q +$$

Digitized by Google

ed entro i limiti $\pi, -\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 + h\cos 2q)\, 2dq = 4A_r\pi,$$

essendo

$$A_r = \frac{1 + r(r-1)h^2}{2^2} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)h^4}{2^2.4^2}$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)h^6}{2.^2 4.^2 6^2};$$

ma dal n.° 5.°

$$S = \sqrt{A}\,\Big[\int_{-\pi}^{\pi} 2dq - \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} L.2dq$$

$$- \frac{1}{3.5}\int_{-\pi}^{\pi} L^2 2dq - \frac{1}{5.7}\int_{-\pi}^{\pi} L^3 2dq \ldots\Big]$$

e fatta la sostituzione si ha

$$S = 4\pi bc\Big[1 - \frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2)A_1 - \frac{1}{3.5}(\alpha^2+\beta^2)^2 A_2 - \frac{1}{5.7}(\alpha^2+\beta^2)^3 A_3$$

risultato che si richiede per un tale sviluppo.

I coefficienti $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ . . .

sono evidentemente

$$A_1 = \frac{1}{2^2} \qquad A_2 = \frac{1 + 2h^2}{2^2}$$

$$A_3 = \frac{1 + 3.2.h^2}{2^2}, \quad A_4 = \frac{1 + 4.3.h^2}{2^2} + \frac{4.3.2.1.h4}{2^2 4^2}.$$

Digitized by Google

# NOTA

Abbiamo veduto nel n.° 2.° che le coordinate polari $p$, $q$ per mezzo delle formole

$$x = a\cos p \,,\; y = b\,\mathrm{sen}p\cos q \,,\; z = c\,\mathrm{sen}p\,\mathrm{sen}q$$

verificano l'equazione dell'ellissoide, e deducemmo in seguito l'integrale definito doppio

$$(1) \qquad S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}p \; dp \; dq \sqrt{A\cos^2 p + B\,\mathrm{sen}^2 p}$$

che ne esprime la superficie curva.

Non è difficile a dimostrarsi la sussistenza della (1) sotto la medesima forma, quando chiamate $p$, $q$ due altre coordinate polari, e $\rho$ una retta, che dal centro dell'ellissoide si conduce ad un punto qualunque di essa si stabiliscano l'equazioni

$$x = \rho\cos p \,,\; y = \rho\,\mathrm{sen}p\cos q \,,\; z = \rho\,\mathrm{sen}p\,\mathrm{sen}q$$

ove per la natura della superficie si ha

$$\rho = \frac{abc}{\sqrt{A\cos^2 p + B\,\mathrm{sen}^2 p}}$$

In questo caso conviene applicare una formola generale (*) per la quadratura delle superficie curve, cioè

$$(2) \qquad S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} S'\,\mathrm{sen}p \; dp \; dq$$

---

(*) Si veda la citata memoria del sig. Cauchy.

Digitized by Google

ove rappresentando S una superficie convessa, S' denoterà il doppio della proiezione di questa superficie sopra un piano perpendicolare alla retta $\rho$; che se S è una superficie piana, allora S' è la proiezione della S sopra il detto piano.

Per una ellissoide, S' sarà la sezion trasversale del cilindro ad essa circoscritto, del quale i lati sono paralleli alla retta $\rho$, e di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\rho^2\left(\frac{x\cos p}{a^2}+\frac{y\,\mathrm{sen}p\cos q}{b^2}+\frac{z\,\mathrm{sen}p\,\mathrm{sen}q}{c^2}\right)^2=1$$

Ma la sezione fatta nel cilindro con il piano delle $xy$ è l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\rho^2\left(\frac{x\cos p}{a^2}+\frac{y\,\mathrm{sen}p\cos q}{b^2}\right)^2=1$$

che può mettersi sotto la forma

$$A_1x^2+B_1y^2+2C_1xy=1$$

della quale gli semiassi maggiore e minore $m$, $n$ si determinano per le radici $s'$, $s''$ dell'equazione di secondo grado

$$s^2-(A_1+B_1)s+A_1B_1-C_1^2=0.$$

vale a dire

$$m=\frac{1}{\sqrt{s'}},\quad n=\frac{1}{\sqrt{s''}},\quad \text{ed } mn=\frac{1}{\sqrt{s's''}}$$

ed anche

$$s's''=A_1B_1-C_1^2$$

e siccome

Digitized by Google

$$A_2 = \frac{a^2 - \rho^2 \cos^2 p}{a^4}, \quad B_2 = \frac{b^2 - \rho^2 \operatorname{sen}^2 p \cos^2 q}{b^4}$$

$$C_2 = -\frac{\rho^2 \cos p \operatorname{sen} p \cos q}{a^2 b^2}$$

e quindi

$$ss'' = \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q}{a^2 b^2 c^2}, \quad mn = \frac{abc}{\rho \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q}$$

Per mezzo di questi valori l'area dell'ellisse è

$$\pi mn = \frac{\pi abc}{\rho \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q}$$

e per conseguenza l'area perpendicolare alla retta $\rho$ sarà $\frac{\pi abc}{\rho}$, ed in fine

$$S' = \frac{2\pi abc}{\rho}$$

qual valore sostituito nella (2) si ottiene precisamente la formola (1), egualmente che per le coordinate polari $p$, $q$ disgiunte dalla considerazione della distanza $\rho$.

Digitized by Google

| Errori: | Correzioni: |
| --- | --- |
| Pag. 7. lin. 13. $2\pi U$ | $2\pi U\sqrt{AB}$ |
| 8. 14. $2A, \pi B$ | $2\sqrt{A}, 2\sqrt{B}$ |
| 16 lin. 7. $\frac{d^n S}{dy}$ | $\frac{d^n S}{dy^2}$ |
| 23 lin. ult. $(\cos \omega z y)$ | $(1+\cos \omega y)^n$ |
| 24. lin. 20 $p$ | $p$ |

Digitized by Google

Digitized by Google

SOPRA

# ALCUNE APPLICAZIONI

DEL

# METODO INVERSO

## DELLE TANGENTI

*MEMORIA*

DI BARNABA TORTOLINI

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1839

Digitized by Google

Digitized by Google

## *Sull'equazioni di alcune curve piane, e riferite ad assi ortogonali, supponendo l'arco una data funzione dell'ascissa.*

1. Se venga data di una curva l'equazione fra le coordinate rettangolari $x$, $y$, si potrà sempre avere o esattamente o con approssimazione la lunghezza di un arco corrispondente alle medesime coordinate $x$, $y$. Nel primo caso la curva dicesi rettificabile, e nel secondo caso la rettificazione non si potrà esprimere che in serie, come succede per l'ellissi e per l'iperbola, delle quali la rettificazione ha dato origine ad interessanti ricerche dei geometri. Si potrebbe ora fare un quesito inverso; vale a dire: supponendo che l'arco di una curva piana sia una determinata funzione dell'ascissa, trovare l'equazione della curva fra le coordinate ortogonali $x$, $y$. Prima di rispondere a questa dimanda, osserveremo ripetendo quanto sopra, che l'arco $s$ potrà essere dato in funzione dell'ascissa, o in termini finiti, od approssimati, e nella prima ipotesi soltanto si darà origine ad un genere di curve tutte rettificabili. La presente memoria offrirà la risoluzione di questa

Digitized by Google

doppia questione mostrandone opportune applicazioni; non tralasciando di più l'indagine dall'equazioni delle curve che sono le sviluppate delle precedenti, quante volte sieno rettiffcabili. Gli esempi che si scelgono, riguardano specialmente quei casi, nei quali l'arco $s$, e l'ascissa $x$ esprimono una parabola di un dato ordine $m \pm n$; ed a questo oggetto riporto le formole che trovansi nel Bollettino delle scienze di *Ferrusac* per l'anno 1825, ove si asserisce essere queste estratte da un' operetta del sig. *I. F. Chr. Werneburgio* di *Iena*, e sotto il titolo, *Curvarum aliquot nuper repertarum synopsis*. Non essendo però a mia conoscenza nè l'indicata opera, nè il seguito degli estratti che si promettono nel detto Bollettino; non mancherò poi di esaminare quei casi, ove l'arco $s$, e l'ascissa $x$, esprimono un ellissi, un circolo, un'iperbola, ed un' iperbola equilatera, ed infine una cicloide ed una logaritmica. Quantunque le indicate ricerche nulla contengano di rimarchevole per parte dell' analisi, contuttociò non saranno del tutto prive di utilità, qualora si riguardino pe' giovani studenti, come un esercizio a nuove applicazioni del calcolo Integrale alla teoria delle curve.

Siano pertanto $x$, $y$, le coordinate ortogonali per un punto qualunque di una curva piana, di cui l'arco $s$ venga espresso dall'equazione generale

$$s = \varphi(x)$$

Per dedurre da questa l' equazione fra le coordinate $x$, $y$, basta riflettere, che oltre la solita formola

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

esiste ancora

Digitized by Google

$$ds = \varphi'(x)\, dx$$

quindi l'eliminazione ci dà

$$dy = dx \sqrt{\varphi'^2(x) - 1}$$

ed integrando

$$y = \int dx \sqrt{\varphi'^2(x) - 1} + C.$$

Le diverse forme, che può assumere $\varphi(x)$, renderà più o meno facile l'integrazione; per cui ci sarà molto utile introdurre l'angolo che la retta toccante la curva in punto, forma con l'asse della $y$; e che chiamato $\alpha$, verrà dato dalla formola

$$dy = \cot\alpha dx$$

che includono eziandio le altre due

$$dx = ds \operatorname{sen}\alpha, \quad dy = ds\cos\alpha$$

ma d'altronde per la condizione stabilita abbiamo

$$dx = \frac{ds}{\varphi'(x)}$$

perciò sarà

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$

e reciprocamente la $x$, sarà funzione di $\alpha$, vale a dire

$$x = \psi(\operatorname{cosec}\alpha)$$

che differenziata da

$$dx = -\psi'(\operatorname{cosec}\alpha) \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} d\alpha$$

Digitized by Google

il qual valore sostituito nell'equivalente espressione di $dy$, porge con integrare

$$y = -\int \psi'(coseca)\frac{cos^2\alpha}{sen^3\alpha}\,d\alpha + C,$$

e trasformando i *seni* e *coseni* nella linea cosecante, sarà ancora

$$y = -\int \psi'(coseca)\ coseca\ (coseco^2\alpha - 1)\,d\alpha + C.$$

L'integrale di questa ultima formola unitamente al valore della $x$, conduce per via dell' eliminazione dell'angolo $\alpha$, alla equazione fra le coordinate rettangolari $x$, $y$. L'arco $s$, verrà dato in funzione dell'angolo $\alpha$ quando si osservi

$$s = \varphi(x) = \varphi\left(\psi\ (coseca)\right) = F\ (coseca)$$

Dopo ciò non sarà difficile le determinazione del raggio $\rho$ del circolo osculatore; partendo dalla cognita equazione

$$\rho = \pm\frac{ds}{d\beta}$$

essendo l'angolo $\beta$ complemento di $\alpha$, per cui $d\beta = -d\alpha$, ed avremo la trasformata

$$\rho = \mp\frac{ds}{d\alpha}$$

ma dalle antecedenti equazioni si ricava

$$ds = \frac{dx}{sen\alpha},\quad d\alpha = \frac{-sen^2\alpha dx}{cos\alpha\psi'(coseca)}$$

perciò sostituendo risulta

Digitized by Google

$$\rho = \pm \frac{cosec^2\alpha \sqrt{cosec^2\alpha - 1}}{\psi'(cosec\alpha)}$$

La trovata espressione del raggio del circolo osculatore si ridurrà funzione della sola $x$, eliminando l'angolo $\alpha$, per mezzo delle relazioni che passano fra $x$ ed $\alpha$. Con egual facilità arriveremo a questa, facendo uso dell'altra espressione del raggio del circolo osculatore, ove $dx$ è costante, cioè

$$\rho = \pm \frac{ds^3}{dx d^2\gamma}$$

e per l'equazioni stabilite di sopra

$$ds^3 = \varphi'^3(x)\, dx^3\,, \quad d^2\gamma = \frac{\varphi'(x)\,\varphi''(x)\,dx^2}{\sqrt{\varphi'^2(x) - 1}}$$

cosicchè sostituendo si ottiene

$$\rho = \pm \frac{\varphi'^2(x)}{\varphi''(x)} \sqrt{\varphi'^2(x) - 1}$$

2.° Una facile applicazione riesce delle precedenti formole, se l'arco $s$ eguagli le corrispondenti ordinate di una parabola di second'ordine, e di equazione

$$s^2 = px, \text{ od } s = \sqrt{px}$$

che differenziando e dividendo per $ds$ sarà

$$\frac{dx}{ds} = \frac{2\sqrt{px}}{p} = sen\alpha$$

d'onde si ricava

$$x = \frac{p sen^2\alpha}{4}\,, \quad dx = \frac{p sen\alpha cos\alpha d\alpha}{2}$$

Digitized by Google

d'onde con la sostituzione della $x$, l'arco $s$ diviene

$$s = \frac{p}{2} sen\alpha$$

e di $dx$, nel valore di $dy$, verrà

$$dy = \frac{p}{2} cos^2\alpha d\alpha$$

ed integrando

$$y = \frac{p}{2} \int cos^2\alpha d\alpha + C.$$

Prima di venire all'integrazione, che non ammette difficoltà alcuna, osservo che l'equazione differenziale della curva si trova col prendere

$$cot\alpha = \frac{\sqrt{1-sen^2\alpha}}{sen\alpha} = \frac{\sqrt{p^2-4px}}{2\sqrt{px}}$$

e si avrebbe

$$dy = \tfrac{1}{2} dx \sqrt{\frac{p-4x}{x}}$$

Essendo più facile integrare la prima espressa dall' angolo $\alpha$; sarà evidentemente

$$y = \frac{p}{4} (\alpha + sen\alpha cos\alpha) + C,$$

e siccome ad $\alpha = o$ è $y = o$, così sarà la costante $C = o$; ed i valori di $x$, $y$ in funzione dell'angolo $\alpha$, saranno

$$y = a(2\alpha + sen2\alpha), \; x = a(1 - cos2\alpha)$$

ove per brevità $p = 8a$. Le trovate due equazioni rappresentano evidentemente una cicloide del diametro $2a = \frac{p}{4}$, e l'eliminazione dell'angolo $2\alpha$ ci dà la cognita equazione

Digitized by Google

$$\gamma = \sqrt{2ax - x^2} + a\text{Arc.}\left(sen = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}\right).$$

Quindi se dalla sommità della cicloide si descriva una parabola di parametro eguale al quadruplo del diametro del circolo generatore, i corrispondenti archi di cicloide saranno eguali alle rispettive ordinate della parabola. Questa proprietà o relazione delle due curve non deve estendersi al di là del fuoco della parabola; mentre le ordinate della cicloide divengono immaginarie per valori di $x > 2a$, ovvero per $x > \frac{p}{4}$. Questa conseguenza può dedursi ancora riflettendo, che l'arco $s$ di una cicloide computato dal vertice superiore del diametro $2a$ si esprime per

$$s = 2\sqrt{2ax}, \text{ ed } s^2 = 8ax.$$

Equazione ad una parabola di parametro $p = 8a$; prendendo dall'estremità dell'ascisse altrettante rette eguali a $2\sqrt{2ax}$.

3.° L'applicazione fatta ad una parabola di second'ordine estendiamola ad una parabola dell'ordine $m + n$, e di equazione

$$s^{m+n} = p^n x^m$$

ove per la differenziazione si ha

$$(m + n)\, s^{m+n-1}\, ds = mp^n\, x^{m-1}\, dx,$$

e dividendo tutto per $ds$, ed introducendoci $sen\alpha$ verrà facilmente

$$sen\alpha = \frac{(m + n)\, s^{m+n-1}}{mp^n\, x^{m-1}} = \frac{(m + n)\, x}{ms}$$

Eliminando ora l'arco $s$ per mezzo della prima e-

Digitized by Google

quazione di questo n.° risulteranno le linee *seno* e *coseno*, in funzione dell'ascissa $x$, cioè

$$sen\alpha = \frac{m+n}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{m}{m+n}}$$

$$cos\alpha = \left\{ -\left(\frac{m+n}{m}\right)^{2}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2n}{m+n}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

dalle quali ponendo per brevità

$$q = p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}}$$

si ricavano i valori di $x$ ed $s$, espressi per $\alpha$.

$$x = \frac{m}{m+n}\, q\,(sen\alpha)^{\frac{m+n}{n}},\quad s = q\,(sen\alpha)^{\frac{m}{n}}.$$

I valori delle linee trigonometriche *seno* e *coseno* diverranno funzioni dell'arco $s$ col mutare l'ascissa $x$ nell'arco $s$, e l'esponente $\frac{n}{m+n}$ in $\frac{n}{m}$. Dalle precedenti equazioni componendo il valore della cotagente in funzione dell'ascissa $x$; ricaviamo l'equazione differenziale della curva

$$dy = \frac{\left\{1 - \left(\frac{m}{m+n}\right)^{2}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2n}{m+n}}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{m+n}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{n}{m+n}}} dx.$$

Non è poi difficile di avere l'equazione differenziale fra $y$ ed $\alpha$; che nelle applicazioni sarà più comodo; differenziando il precedente valore della $x$, e sostituendo nel valore di $dy$, ci dà

$$dx = \frac{mq}{n}\,(sen\alpha)^{\frac{m}{n}}\, cos\alpha d\alpha\,;$$

Digitized by Google

e quindi

$$dy = \frac{mq}{n} (sen\alpha)^{\frac{m}{n}-1} cos^2\alpha d\alpha,$$

o più semplicemente

$$dy = qcos\alpha.d.(sen\alpha)^{\frac{m}{n}}.$$

Le formole di questo numero sono quelle, che si trovano nel citato Bollettino di *Ferrusac*. L' integrale della precedente ultima formola unitamente al valore della $x$, rappresenta l' equazione della curva dimandata; e l'eliminazione dell'angolo $\alpha$, fornirà l'equazione alle coordinate ortogonali. Per ottenere in fine la lunghezza del raggio del circolo osculatore, basterà differenziare il precedente valore dell'arco $s$, e dividere per $d\alpha$; e sarà

$$\rho = \pm \frac{mq}{n} (sen\alpha)^{\frac{m.n}{n}} cos\alpha.$$

4.° Tutte le stabilite formole si semplificano col porre $n = 1$, considerandosi così una parabola dell'ordine $m + 1$, e di equazione

$$s^{m+1} = px^m,$$

ed altre essere

$$q = p\left(\frac{m}{1+m}\right)^m$$

sarà ancora

$$s = qsen^m\alpha,\ ds = mqsen^{m-1}\alpha cos\alpha d\alpha$$

$$x = \frac{m}{1+m} qsen^{m+1}\alpha,\ dx = mqsen^m\alpha cos\alpha d\alpha;$$

quindi per l'angolo $\alpha$, le doppie equazioni

Digitized by Google

$$sen\alpha = \frac{1+m}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{1+m}}$$

$$cos\alpha = \left\{1 - \left(\frac{1+m}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{1+m}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ovvero

$$sen\alpha = \frac{1+m}{m}\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$cos\alpha = \left\{1 - \left(\frac{1+m}{m}\right)^2\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{m}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

le quali porgono l'equazione differenziale

$$dy = \frac{\left\{1 + \left(\frac{1+m}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{1+m}}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1+m}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{1+m}}}dx$$

oppure l'altra

$$dy = qcos\alpha d.\, sen^m\alpha = mqsen^{m-1}\alpha cos^2\alpha d\alpha$$

finalmente il raggio di curvatura $\rho$,

$$\rho = \pm mqsen^{m-1}\alpha cos\alpha.$$

L'integrale trigonometrico, che esprime il valore dell'ordinata $y$, sarà composto di un seguito di termini differenti secondo che l'esponente $m$ è pari od impari; osservando prima che per i noti artificii dell'integrazione per parti si potrà decomporre nei due termini:

$$y = q\left(sen^m\alpha cos\alpha + \int sen^{m+1}\alpha d\alpha\right) + C.$$

Digitized by Google

Ora facendo $m + 1 = \nu$, sarà $m$, pari per i valori impari di $\nu$, ed $m$ impari per i valori pari di $\nu$; e per i valori impari risulta

$$\int sen^{\nu}\alpha d\alpha = -\frac{cos\alpha}{\nu}\left[sen^{\nu-1}\alpha + \frac{\nu-1}{\nu-2}sen^{\nu-3}\alpha\right.$$

$$\left. + \frac{(\nu-1)(\nu-3)}{(\nu-2)(\nu-4)}sen^{\nu-5}\alpha + \ldots \frac{2.4\ldots(\nu-3)(\nu-1)}{1.2.3.(\nu-4)(\nu-2)}\right]$$

e per il caso di $\nu$ pari

$$\int sen_{,}\alpha d\alpha = -\frac{cos\alpha}{\nu}\left[sen^{\nu-1}\alpha + \frac{\nu-1}{\nu-2}sen^{\nu-3}\alpha + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{3.4\ldots(\nu-3)(\nu-1)}{2.4\ldots(\nu-4)(\nu-2)}sen\alpha\right] + \frac{1.3\ldots(\nu-3)(\nu-1)}{2.4\ldots\nu-2.\nu}\alpha + C,$$

le quali formole per ambedue i casi ci somministrano il modo di avere le ordinate delle curve. Veniamo ora ad applicazioni speciali.

5.° Sia $m = 2$, avremo l'arco $s$ dato da una parabola di terzo ordine, cioè

$$s^3 = px^2$$

ed abbiamo dalle formole generali

$$q = \frac{4}{9}p,\ x = \frac{2q}{3}sen^3\alpha,\ s = qsen^2\alpha$$

ed insieme

$$dy = 2qsen\alpha cos^2\alpha d\alpha$$

ed integrando

$$y = -\frac{2q}{3}cos^3\alpha + C.$$

Digitized by Google

ma ad $\alpha = 0$ corrisponde $\gamma = 0$, perciò la costante $C = \frac{2q}{3}$; e l'integrale completo sarà :

$$\gamma = \frac{2}{3} q \left( 1 - cos^3\alpha \right).$$

Infine il raggio di curvatura diviene

$$\rho = 2qsen\alpha cos\alpha = qsen2\alpha$$

Per conoscere con facilità l'equazione alle coordinate rettangolari $x, y$ si ponga

$$\frac{2}{3} q - \gamma = \gamma'$$

avremo, togliendo l'apice, le due equazioni simultanee

$$x = \frac{2}{3} qsen^3\alpha, \; y = \frac{2}{3} qcos^3\alpha$$

ove ponendo

$$A = \frac{2}{3} q = \left(\frac{2}{3}\right)^3 p$$

verrà molto facilmente

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = sen\alpha, \quad \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = cos\alpha$$

ed infine elevando al quadrato, e sommando risulta

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Tal'è l'equazione alla curva, gli archi della quale sono eguali alle corrispondenti ordinate di una pa-

Digitized by Google

rabola cubica; ed è come ognun vede simile all'evoluta dell'ellissi, quantunque la forma della curva è da essa totalmente diversa; mentre per l'evoluta dell'ellissi deve sussistere

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

e non può accadere A = B senza che sia A=o = B. Di più avendosi evidentemente

$$sen\alpha cos\alpha = \left(\frac{xy}{A^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

così per il raggio osculatore di questa curva si ha l'espressione semplicissima

$$\rho = 2q\left(\frac{xy}{A^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

6.° Supponendo il numero $m = 3$, si ha fra l'arco $s$, e l'ascissa $x$ l'equazione ad una parabola del quart' ordine, cioè

$$s^4 = px^3$$

e le solite equazioni del n. 4.° ci porgono oltre

$$q = \left(\frac{3}{4}\right)^3 p$$

$$s = qsen^3\alpha\ ,\ x = \frac{3}{4}qsen^4\alpha$$

alle quali deve unirsi

$$dy = 3qsen^2\alpha cos^2\alpha d\alpha$$

che integrata ci dà

Digitized by Google

$$y = -\frac{3q}{8}\left(\frac{sen4\alpha - 4\alpha}{4}\right) + C,$$

che corrispondendo ad $\alpha = 0$, $y = 0$, sarà la costante $C = 0$, ed il valore dell'ordinata si ha sotto la forma

$$y = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^4 p\,(4\alpha - sen4\alpha)$$

alla quale deve sempre annettersi il valore della $x$, dopo la sostituzione della $q$, cioè

$$x = \left(\frac{3}{4}\right)^4 p sen^4\alpha$$

L'eliminazione dell'angolo $\alpha$ si eseguisce con lo stabilire da questa le due formole

$$sen\alpha = \sqrt[4]{\frac{x}{A}},\ \alpha = Arc\left(sen = \sqrt[4]{\frac{x}{A}}\right)$$

ove per brevità

$$A = \left(\frac{3}{4}\right)^4 p$$

e quindi si formino le quantità $4\alpha$, $sen4\alpha$ da sostituirsi nel valore della $y$. Omessa contuttociò la ricerca di questi valori, ci piacerà piuttosto di mostrare, come la curva in proposito ha una qualche analogia con l'equazione della cicloide ; ed a questo fine, si trasformi la potenza quarta del seno nei coseni dell'arco doppio e quadruplo, si otterrà

$$x = \frac{A}{8}(3 - 4cos2\alpha + 1 + cos4\alpha)$$

e ponendo

Digitized by Google

$$x - \frac{A}{8}(3 - 4\cos 2\alpha) = x'$$

avremo due equazioni, dopo di aver fatto

$$4\alpha = 180 + 4\alpha', \; y' = y - 180^{\circ}a, \text{ ed } a = \frac{A}{8}$$

cioè

$$x' = \alpha(1 - \cos 4\alpha'), \; y' = a(4\alpha' + \operatorname{sen} 4\alpha')$$

le quali, se $x'$ non fosse una funzione simultanea della $x$, e dell'angolo $\alpha$, potrebbero rappresentare l'equazioni di una cicloide.

7.° Sia di più, e per maggiori applicazioni il numero $m=4$, risulterà la parabola del quint'ordine

$$s^5 = px^4$$

e l'equazioni di già più volte nominate del n.° 4 ci danno

$$q = \left(\frac{4}{5}\right)^4 p$$

ed insieme

$$s = \left(\frac{4}{5}\right)^4 p \operatorname{sen}^4\alpha, \; x = \left(\frac{4}{5}\right)^5 p \operatorname{sen}^5\alpha$$

$$dy = 4q\operatorname{sen}^3\alpha\cos^2\alpha d\alpha$$

ed integrata

$$y = \frac{4q}{15}\cos\alpha(3\operatorname{sen}^4\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - 2) + C,$$

ed avendosi per $\alpha = 0$, anche $y=0$, così la costante

$$C = \frac{8q}{15} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^5 p$$



Digitized by Google

ed il valore della $y$, risulta

$$y = \frac{A}{3}\left((3sen^4\alpha - sen^2\alpha - 2)\cos\alpha + 2\right)$$

ove

$$A = \left(\frac{4}{5}\right)^5 p.$$

Qui pure l'eliminazione dell' angolo $\alpha$ si dovrebbe eseguire per mezzo dell'equazione

$$sen\alpha = \sqrt[5]{\frac{x}{A}}$$

e formare quindi le rispettive funzioni trigonometriche. Ma tralasciando un tal lavoro, ci piacerà piuttosto far vedere come questa curva ammette una qualche analogia con la curva di equazione

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{5}} = 1.$$

Infatti se nel valore della $y$, si trasformino $sen^2\alpha$, $sen^4\alpha$ in $cos\alpha_1$, $cos3\alpha_1$, $cos^5\alpha$, riuscirà

$$y = \frac{A}{3}\left(2 + \frac{12cos^5\alpha - 5cos3\alpha - 8cos\alpha}{4}\right)$$

alla quale si dovrà sempre annettere

$$x = Asen^5\alpha$$

quindi ponendo

$$y - \frac{A}{3}\left(2 - \left(\frac{5cos3\alpha + 8cos\alpha}{4}\right)\right) = y'$$

risulteranno le due equazioni semplicissime

$$x = Asen^5\alpha,\ y' = A\,cos^5\alpha$$

Digitized by Google

dalle quali subito si ottiene

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{\gamma'}{A}\right)^{\frac{2}{5}} = 1;$$

ove se la $\gamma'$ non fosse una funzione simultanea della $\gamma$ ed $\alpha$; rappresenterebbe una curva compresa in una più generale

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{m} + \left(\frac{\gamma}{B}\right)^{m} = 1.$$

Nello stesso modo si potrebbero più oltre spingere le applicazioni per le parabole di ordini superiori; ma abbandonando queste, rivolgiamoci piuttosto alle linee del secondo ordine, per le quali già ne abbiamo veduto per la parabola Apolloniana un esempio; e scegliendo un'ellisse; domanderemo l'equazione della curva, nella quale i suoi archi sono eguali alle ordinate di quella, e di assi $2a$, $2b$.

8.° Valga pertanto fra l'arco $s$, e l'ascissa $x$ l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1$$

che differenziata e divisa per $ds$, ci dà secondo le denominazioni stabilite

$$sen\alpha = -\frac{a^2}{b^2}\frac{s}{x} = -\frac{a}{b}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

d'onde

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 sen^2\alpha}}$$

Digitized by Google

ed insieme l'arco

$$s = \mp \frac{b^2 sen\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 sen^2\alpha}}.$$

Differenziando ora il valore della $x$, sarà

$$dx = \mp \frac{a^2 b^2 sen\alpha cos\alpha d\alpha}{(a^2 + b^2 sen^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

e per conseguenza l'equazione differenziale fra $y$ ed $\alpha$, diviene

$$dy = \mp \frac{a^2 b^2 cos^2\alpha d\alpha}{(a^2 + b^2 sen^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrando quest'ultima, ed eliminato $\alpha$ per mezzo del valore della $x$, si avrebbe l'equazione della curva fra le coordinate rettangolari $x$, $y$; ma non potendosi integrare che per approssimazione, dedurremo dalle stabilite formole alcune conseguenze; e facendo primieramente $a = b$; le precedenti si trasformano in

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + sen^2\alpha}}, \quad s = \mp \frac{asen\alpha}{\sqrt{1 + sen^2\alpha}}$$

ed insieme

$$dy = \mp \frac{acos^2\alpha d\alpha}{\sqrt{1 + sen^2\alpha}}$$

la quale è ugualmente irriducibile in termini finiti; e potrebbe dipendere da una funzione ellittica di seconda specie. Per avere un qualche risultato elegante, si chiami $\upsilon$ un angolo, che verifichi l'equazione dell'ellissi, per mezzo delle formole

$$x = acos\upsilon, \quad s = bsen\upsilon$$

Digitized by Google

che simultaneamente sostituendo saranno le equazioni polari della curva; e differenziandole, avremo

$$dx = -asen\upsilon d\upsilon,\ ds = bcos\upsilon d\upsilon$$

Dividendo la prima per la seconda, si deduce la nota relazione dell'angolo $\alpha$

$$sen\alpha = -\frac{a}{b}\frac{sen\upsilon}{cos\upsilon}$$

d'onde

$$cot\alpha = -\frac{\sqrt{b^2cos^2\upsilon - a^2sen^2\upsilon}}{asen\upsilon}$$

che sostituito unitamente al valore di $dx$ nell'equazione fra $y$ ed $\alpha$, sarà

$$dy = bd\upsilon\sqrt{1 - c^2sen^2\upsilon}$$

ove per brevità

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2}$$

L'integrale di questa rappresenta una funzione ellittica di seconda specie, e dovrà sussistere per valori dell'angolo $\upsilon$, da essere

$$1 - c^2sen^2\upsilon > 0$$

ossia sen $\upsilon < \frac{1}{c}$:

L'ipotesi poi $a = b$ ci porge per

$$sen\alpha = -tang\upsilon, \text{ ed}$$

$$dy = ad\upsilon\sqrt{1 - 2sen^2\upsilon} = ad\upsilon\sqrt{cos2\upsilon}$$

e dovrà essere

Digitized by Google

$$sen\upsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che corrisponde ad angoli $\upsilon < 45.^{o}$

Infine come l'angolo $\alpha$ è dato in funzione di $\upsilon$, così l'angolo $\upsilon$ potrà esser dato per $\alpha$; e si avrebbe evidentemente

$$sen\upsilon = -\frac{b sen\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 sen^2\alpha}} \quad cos\upsilon = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 sen^2\alpha}}$$

che nell'ipotesi di $a = b$, si trasformano in

$$sen\upsilon = -\frac{-sen\alpha}{\sqrt{1 + sen^2\alpha}}, \quad cos\upsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + sen^2\alpha}}$$

9.° Quando l'arco $s$ venga dato dall'equazione di un'iperbola, con l'origine al centro

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1$$

che differenziata, e divisa per $ds$, dà al solito

$$sen\alpha = \frac{a}{b}\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

la quale dà origine ai valori di $x$ ed $s$, cioè

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2 sen^2\alpha}} \quad s = \frac{b^2 sen\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2 sen^2\alpha}}$$

Differenziando ora la prima, sarà

$$dx = \frac{a^2 b^2 sen\alpha cos\alpha d\alpha}{(a^2 - b^2 sen^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

il quale sostituito nella consueta espressione di $dy$, ci porge

Digitized by Google

$$dy = \frac{a^2b^2\cos^2\alpha d\alpha}{(a^2 - b^2\operatorname{sen}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

Espressione che non si può integrare che per serie; e dipenderà da una funzione ellittica di seconda specie. Nell'ipotesi di un' iperbola equilatera $a = b$, perciò

$$x = \frac{a}{\cos\alpha}\ ,\ dx = \frac{a\operatorname{sen}\alpha d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

ed il valore di $dy$ diviene

$$dy = \frac{ad\alpha}{\cos\alpha}$$

ed integrando

$$y = \frac{a}{2}\ log\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}\right) + C;$$

od anche sotto altra forma

$$y = a\ log\ tang\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) + C.$$

Per la determinazione della costante; ad $\alpha = 0$ si ha $y = 0$, e quindi $C = 0$; per cui il valore della $y$; sarà soltanto coll'eseguire una leggera trasformata

$$y = \frac{a}{2}\ log\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2$$

Per l'eliminare l'angolo $\alpha$, si passi prima dai logaritmi ai numeri; ed avremo

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

ed essendo

Digitized by Google

$$cos\alpha = \frac{a}{x}, \; sen\alpha = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

si ottiene col togliere i radicali

$$\left(a\ e^{\frac{y}{a}} - x\right)^2 = x^2 - a^2.$$

Tal'è l'equazione della curva, della quale gli archi sono eguali alle rispettive ordinate di un' iperbola equilatera; qui anche l'introdurre le coordinate polari potrà semplicare alcune delle antecedenti equazioni. Infatti, chiamando $v$ un angolo, o coordinata polare, osserveremo che l' equazione dell' iperbola si verifica per mezzo dei valori

$$x = \frac{a}{cosv} \qquad s = btangv$$

d'onde differenziando

$$dx = \frac{asenvdv}{cos^2v}, \quad ds = \frac{bdv}{cos^2v}$$

dalle quali per la divisione; viene

$$sen\alpha = \frac{asenv}{b}, \quad cos\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - a^2sen^2v}}{b}$$

i quali sostituiti nella formola $dy = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}dx$, risulta

$$dy = \frac{dv}{cos^2v}\sqrt{b^2 - a^2sen^2v};$$

il quale non si può integrare che per serie, e dovrà essere l'angolo $v$, da verificare

$$senv < \frac{b}{a}$$

Digitized by Google

e l'ipotesi di $a = b$; ci riproduce evidentemente la formola di già trovata col semplice mutare $v$ in $\alpha$. In fine sarà utile il mostrare come a quest'ultimo risultato si arriva più facilmente; servendosi immediatamente di ciò che è stato detto al n.° 2. Infatti per l'iperbola si ha

$$\frac{ds}{dx} = \varphi'(x) = \frac{b}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

ed il valore di $dy$ del citato numero diviene

$$dy = \frac{dx\sqrt{b^2 - a^2}\,(x^2 - a^2)}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

ove sostituendo $x = \frac{a}{cosv}$ torna evidentemente la stabilita equazione.

10.° Finora abbiamo considerato l' equazioni alle linee algebriche; estendiamo ora questa teoria ad alcune curve trascendenti, fra le quali in particolare sceglieremo la cicloide e la logaritmica. Ponendo pertanto, riguardo alla prima, l'origine delle coordinate nel punto estremo del diametro del circolo generatore, e che divide la curva in due parti eguali e simili; allora l'equazione differenziale fra l'arco $s$, e l'ascissa $x$, sarà

$$ds = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$$

essendo $2a$ il diametro del circolo generatore; quindi la derivata prima dell'arco è

$$\frac{ds}{dx} = \varphi'(x) = \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$$

Digitized by Google

il quale sostituito nel valore di $dy$ del n.° 2, abbiamo facilmente

$$dy = \sqrt{2}.\, dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

Ora ponendo

$$dy' = dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

rappresenterà questa l'equazione differenziale di una cicloide del diametro $a$. Dunque per delineare quella curva, nella quale i suoi archi sieno eguali alle ordinate di una cicloide di diametro $2a$, basterà descrivere un'altra cicloide di diametro $a$, od eguale alla metà del precedente, e prendere nel medesimo tempo le ordinate di quest'ultima, moltiplicate per $\sqrt{2}$... Alle medesime conclusioni saremmo giunti facendo uso delle equazioni finite della cicloide; come si vedrà qui appresso.

Chiamando infatti $u$ un angolo compreso fra i limiti o, e $\pi$, si sa che l'equazioni della cicloide saranno

$$x = a\,(1 - cosu) \quad s = a\,(u + senu)$$

e che l'eliminazione dell'angolo $u$, produce l'equazione

$$s = a\,\mathrm{Arc}\left(sen = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2}.$$

Differenziando ora i valori di $x$ ed $s$, e dividendo l'una per l'altra, si ha

$$sen\alpha = \frac{senu}{1 + cosu} = tang\,\tfrac{1}{2}\,u = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

Digitized by Google

d'onde

$$x = \frac{2a\,sen^2\alpha}{1 + sen^2\alpha}$$

e differenziando

$$dx = \frac{4a\,sen\alpha\cos\alpha d\alpha}{(1 + sen^2\alpha)^2}$$

d'onde il valore di $dy$ diviene

$$dy = \frac{4a\cos^2\alpha d\alpha}{(1 + sen^2\alpha)^2}$$

ovvero trasformando le potenze del seno e coseno nel coseno dell'arco doppio; sarà per la $x$

$$x = \frac{2a\ (\ 1 - cos2\alpha\ )}{3 - cos2a}$$

e per il valore di $dy$

$$dy = \frac{8a\ (\ 1 + cos2\alpha\ )\ d_\alpha}{(\ 3 - cos2\alpha\ )^2}.$$

Integrando quest'ultima, ed eliminando l'angolo $\alpha$, si ottiene l'equazione fra $x$ ed $y$. Con più eleganza però potremo ciò eseguire con introdurci l'angolo $u$; che in funzione di $\alpha$ è dato dall'equazioni

$$sen\alpha = tang\,\tfrac{1}{2}u\ ,\ \cos\alpha d\alpha = \frac{\frac{1}{2}du}{cos^2\frac{1}{2}u}$$

per cui il primo valore di $dy$ si trasforma in

$$dy = 2adu\cos^2\tfrac{1}{2}u\sqrt{\cos u}.$$

Quest' ultima si rende integrabile col chiamare $v$ un altro angolo da essere

$$\cos u = cos^2\tfrac{1}{2}v$$

Digitized by Google

d'onde

$$sen\,\tfrac{1}{2}u = \frac{\sqrt{1 - cos^2\tfrac{1}{2}v}}{2} = \frac{sen\tfrac{1}{2}v}{\sqrt{2}}$$

ed insieme differenziando

$$cos\tfrac{1}{2}u\,du = \frac{cos\tfrac{1}{2}v dv}{\sqrt{2}}$$

i quali valori sostituiti ci danno

$$d\gamma = a\sqrt{2}.\,cos^2\tfrac{1}{2}v dv$$

ed integrando viene

$$\gamma = \sqrt{2}.\,\frac{a}{2}(v + senv)$$

non avendo luogo la costante, mentre per $\gamma = o$ riesce $v = o$. Se ora si riflette che per gli stabiliti valori avremo

$$1 - cosu = \frac{1 - cosv}{2}$$

così all'espressione della $\gamma$, sarà il facile il vedere che dovrà corrisponderci

$$x = \frac{a}{2}(1 - cosv)$$

e rappresenteranno l' equazioni della cicloide di diametro $a$, purchè si ponga per la $\gamma = \gamma'\sqrt{2}$; e quindi eliminato $v$ si ha

$$\gamma' = \frac{a}{2}\,Arc.\left(sen = \frac{\sqrt{ax - x^2}}{\tfrac{1}{2}a}\right) + \sqrt{ax - x^2}.$$

Infine l'integrazione della $\gamma$, riguardo all'angolo $a$, conduce egualmente a quanto abbiamo trovato; e si avrebbe

Digitized by Google

$$\gamma = 4a \int \frac{(1 + cos2\alpha)\, d.2\alpha}{(3 - cos2\alpha)^2}.$$

Ora per le cognite formole del calcolo integrale

$$\int \frac{(1 + cos2\alpha)\, d.2\alpha}{(3 - cos2\alpha)^2} = \frac{4sen2\alpha}{8(3 - cos2\alpha)} + \frac{4}{8} \int \frac{d.2\alpha}{3 - cos2\alpha}$$

ed

$$\int \frac{d.2\alpha}{3 - cos2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{8}}\ Arc.\left(sen = \frac{sen2\alpha\sqrt{8}}{3 - cos2\alpha}\right)$$

e quindi

$$\gamma = 2a\left(\frac{sen2\alpha}{3 - cos2\alpha} + \frac{1}{\sqrt{8}}\ Arc.\left[sen = \frac{sen2\alpha\sqrt{8}}{3 - cos2\alpha}\right]\right)$$

con la quale dovrà sussistere la $x$, espressa in funzione dell'angolo $\alpha$; e siccome da questa si deduce

$$sen2\alpha = \frac{2\sqrt{2x}\,(a - x)}{2a - x},\quad cos2\alpha = \frac{2a - 3x}{2a - x}$$

qui sostituiti nella $\gamma$, si ricava immediatamente

$$\gamma = \frac{a}{2}\sqrt{2}.Arc.\left(sen = \frac{\sqrt{ax - x^2}}{\frac{1}{2}\alpha}\right) + \sqrt{2}.\sqrt{ax - x^2}$$

Espressione del tutto identica con quella di già trovata.

11.° Scegliendo una logaritmica di equazione

$$s = alogx$$

deduciamo

$$sen\alpha = \frac{x}{a}$$

d'onde

Digitized by Google

$$x = a\,sen\alpha\,, \quad dx = a\cos\alpha d\alpha$$

ed insieme

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

e l'equazione differenziale della curva sarà

$$dy = a\,\frac{cos^2\alpha}{sen\alpha}\,d\alpha$$

ed integrando

$$y = a\,(\,log\,tang\,\tfrac{1}{2}\alpha + cos\alpha\,) + C.$$

Sia $b$, l'ordinata che corrisponde ad $\alpha = 90$; sarà la costante $C = b$; perciò l'integrale completo è

$$y = a\,(\,log\,tang\,\tfrac{1}{2}\alpha + cos\alpha\,) + b$$

la quale si può mettere sotto la forma

$$y - b - a\cos\alpha = a\,log\,\frac{sen\alpha}{1 + cos\alpha}$$

ove sostituendo $sen\alpha$, $cos\alpha$ in funzione della $x$, e passando dai logaritmi ai numeri, ricaveremo

$$e^{\frac{y - b - \sqrt{a^2 - x^2}}{a}} = \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Tal'è l'equazione di quella curva, nella quale gli archi sono eguali alle corrispondenti ordinate di una logaritmica.

Che se si fosse fatto uso dell'equazione

$$s = e^{\frac{x}{a}}$$

Digitized by Google

allora

$$sen\alpha = \frac{a}{e^{\frac{x}{a}}}$$

e quindi

$$x = a\log\frac{a}{sen\alpha}, \quad dx = \frac{-a\cos\alpha d\alpha}{sen\alpha}$$

e l'equazione differenziale fra $y$ ed $x$ diviene

$$dy = -a\cot^2\alpha d\alpha.$$

L'integrale di questa è evidentemente

$$y = a(\alpha + \cot\alpha) + C.$$

Ora per determinare la costante; sia $b$ l' ordinata che corrisponde ad $\alpha = 90 = \frac{1}{2}\pi$ sarà

$$C = b - \frac{a\pi}{2}.$$

Facendo questa sostituzione col porre inoltre

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$$

risulterà l'integrale completo

$$y = a(tang\beta - \beta) + b.$$

Ora per il valore precedente di $sen\alpha$ si ottiene

$$tang\beta = \frac{\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2}}{a}$$

quindi l'equazione risultante fra $x$, $y$ verrà data dall'espressione

Digitized by Google

$$b-y+\sqrt{e^{\frac{2x}{a}}-a^2}=a\,\text{Arc.}\left(tang=\frac{\sqrt{e^{\frac{2x}{a}}-a^2}}{a}\right)$$

ovvero

$$\sqrt{e^{\frac{2x}{a}}-a^2}=a\,tang\left(\frac{b-y+\sqrt{e^{\frac{2x}{a}}-a^2}}{a}\right).$$

In un modo simile si potrebbero estendere queste dottrine ad altri esempi; ma tralasciando ulteriori sviluppi; si venga piuttosto alla determinazione delle equazioni delle curve che sono le sviluppate delle precedenti; e che formerà il soggetto dei seguenti numeri della presente memoria.

*Sulle equazioni delle sviluppate di alcune curve considerate negli antecedenti numeri di questa memoria.*

12.° Rappresentando al solito con l'espressione generica

$$y=f(x)$$

l'equazione di una curva qualunque, e riferita a due assi ortogonali, e chiamando X, Y, le coordinate del centro del circolo osculatore, ed $\rho$ il raggio, ed $s$ il corrispondente arco della curva, è noto che valgono l'equazioni

$$\frac{Y-y}{dx}=\frac{\rho}{ds}\qquad\frac{X-x}{dy}=-\frac{\rho}{ds}$$

per mezzo delle quali eliminando le $x, y$ si arriva

Digitized by Google

ad una relazione fra X, Y, che appartenendo a tutti i centri dei circoli osculatori sarà evidentemente l'equazione della evoluta; viceversa cognita l'equazione fra X, Y, si potranno eliminare le dette coordinate, e dedurre quindi un'equazione fra $x, y$ che sarà la sviluppata, o l' evolvente della precedente. È importante di osservare che le evolute sono tutte curve rettificabili; mentre gli archi di queste sono eguali al raggio osculatore della sviluppata, o da esse ne differiscono di una quantità costante. Ciò posto, si chiamino $x, y, s$ le coordinate, e l'arco della curva evoluta X, Y, R, S le coordinate, il raggio osculatore, e l'arco dell'evolvente; le formole precedenti si muteranno in

$$\frac{y - Y}{dX} = \frac{R}{dS}, \quad \frac{x - X}{dY} = -\frac{R}{dS}$$

alle quali si dovrà aggiungere

$$dR = ds$$

Inoltre essendo le direzioni dei raggi osculatori in altrettante rette toccanti l' evoluta ne viene , che chiamando $\alpha$ l'angolo, che l'asse delle $y$ forma con una retta toccante la curva evoluta nel punto $x, y$, dovrà essere

$$\frac{dy}{dx} = cot\alpha = -\frac{dX}{dY}$$

e supponendo l'origine delle coordinate all'estremo dell'arco $s$; sarà semplicemente

$$R = s \text{ , e , } \frac{dY}{dX} = -tang\alpha$$

e nel medesimo tempo



Digitized by Google

$$\frac{dX}{dS} = cos\alpha\,, \quad \frac{dY}{dS} = -sen\alpha.$$

Con questi valori si deducano immediatamente l'espressioni per le coordinate X, Y, cioè

$$Y = y - scos\alpha\,, \quad X = x - s.sen\alpha$$

Ora conoscendosi $x$, $y$, $s$, in funzione dell'angolo $\alpha$, si potrà finalmente coll' eliminazione di questo giungere all'equazione della curva sviluppata.

13.° Così per applicare le precedenti formole ad un caso semplicissimo, supponiamo che le $x, y$ verifichino l'equazione di un punto

$$x = a, y = b$$

e si potrà assumere

$$s = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e l'equazioni ultime del n.° 12 divengono

$$Y - b = -scos\alpha\,, \quad X - a = -s.sen\alpha$$

dalle quali si ha evidentemente

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = a^2 + b^2$$

Equazione ad un circolo con l'origine delle coordinate in un punto della circonferenza; perciò l'evoluta di un circolo è un punto, come d'altronde è evidente.

14.° Prima di procedere ad altre applicazioni sarà utile l'osservare, che la differenziazione dei valori di X, Y, produce soltanto

$$dY = s.sen\alpha d\alpha\,, \quad dX = -s.cos\alpha d\alpha;$$

perciò l'arco S della svilluppata, si determinerà dalla formola

Digitized by Google

$$dS = \sqrt{dX^2 + dY^2} = \pm s d\alpha;$$

la quale ci dice che il raggio osculatore della sviluppata è eguale all'arco corrispondente dell'evoluta. Scegliendo ora l'equazioni di quelle evolute, nelle quali l'arco $s$ esprime una parabola dell'ordine $m + n$, cioè

$$s^{m+n} = p^n x^m$$

non avremo che a sostituire i valori delle $x$, $y$, $s$ in funzione dell'angolo $\alpha$; e di già determinate nel n.° 3, nelle ultime equazioni del n.° 12; e risulterà

$$X = \frac{n}{m+n} q \, (sen\alpha)^{\frac{m+n}{n}}$$

$$Y = \frac{mq}{n} \int (sen\alpha)^{\frac{m}{n}-1} cos^2\alpha d\alpha - q \, (sen\,\alpha)^{\frac{m}{n}} cos\alpha,$$

ed i corrispondenti differenziali si ottengono facilmente; vale a dire

$$dX = q \, (sen\alpha)^{\frac{m}{n}} cos\alpha d\alpha$$

$$dY = (sen\alpha)^{\frac{m+n}{n}} d\alpha;$$

e quindi per l'arco S, si ha

$$dS = q \, (sen\alpha)^{\frac{m}{n}} d\alpha$$

ove la quantità $q$ è come al n.° 3,

$$q = p \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Digitized by Google

Le stabilite formole si semplificano ancora col porre $n = 1$, ed allora per la curva evoluta in cui

$$s^{m+1} = px^m$$

si ottiene

$$X = \frac{1}{m+1} q\,(sen\alpha)^{m+1}$$

$$Y = mq \int (sen\alpha)^{m-1} cos^2\alpha d\alpha - q\, sen^m \alpha cos\alpha$$

ed insieme

$$S = q \int sen^m \alpha d\alpha.$$

Da queste ultime si deduce ciò che si è trovato nel primo esempio; col porre $m = 0$; e sarà

$$s = p,\ X = qsen\alpha,\ Y = -qcos\alpha,\ S = q\alpha$$

le quali includono l'equazione del circolo

$$X^2 + Y^2 = q^2.$$

Non sarà inutile osservare che il coefficiente di $p$; nella espressione

$$q = p\left(\frac{m}{m+1}\right)^m$$

per $m = 0$, assume la forma indeterminata $0^0$; e per conoscere in questo caso il vero valore, basta avvertire che di una funzione $y^z$ che pe' valori particolari si presenta sotto la forma di $0^0$; se ne avrà l'effettivo valore, calcolando l'espressione

$$e^{-\frac{y'z}{yz'}}$$

Digitized by Google

essendo $y'$, $z'$ le derivate di $y$, $z$, ed $e$ la base dei logaritmi iperbolici (1). In questo modo ponendo

$$y = \frac{m}{m+1}, \quad z = m;$$

avremo differenziando riguardo ad $m$

$$y' = \frac{1}{(m+1)^2} \quad z' = 1,$$

e l'esponenziale in proposito si trasforma in

$$e^{-\frac{m}{m+1}}$$

che per $m = 0$ sarà eguale all'unita, e perciò $q=p$.

15. Prendendo per un secondo esempio $m = 1$; avremo per le evolute della cicloide, l' equazioni del n.° 2; ove

$$y = \frac{p}{8}(2\alpha + sen2\alpha) \qquad x = \frac{p}{8}(1 - cos2\alpha)$$

ed

$$s = \frac{p}{2} sen\alpha$$

e per conseguenza le solite equazioni ultime del n.° 12 della sviluppata divengono

$$Y = \frac{p}{8}(2\alpha - sen2\alpha), \quad X = -\frac{p}{8}(1 - cos2\alpha)$$

le quali appartengono evidentemente ad una cicloide di egual diametro, che la cicloide evoluta: d'onde la cicloide è evoluta di se stessa.

---

(1) Si veda Cauchy, Calcul differentiel pag. 45. Paris 1829.



Digitized by Google

16. Supponendo di più $m = 2$; sarà per la curva evoluta l'arco

$$s^3 = px^2$$

e per equazione

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y'}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

quindi prendendo i valori di $x, y, s$, che si trovano nel n.° 5, e sostituiti nelle solite espressioni di X, Y, si ricava per l'equazioni della curva sviluppata

$$Y = \frac{2}{3} q\,(1 - cos^3\alpha) - qsen^2\alpha cos\alpha$$

$$X = -\frac{1}{3} qsen^3\alpha$$

dalle quali eliminando $\alpha$, si ottiene la relazione fra X, Y; in fine per l'arco S di questa curva si ha

$$S = q \int sen^2\alpha d\alpha = \frac{q}{4}(2\alpha - sen2\alpha)$$

17. Prendendo per equazioni dell'evoluta

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2 sen^2\alpha}}, \quad y = a^2b^2 \int \frac{cos^2\alpha d\alpha}{\sqrt{(a^4 - bsen^2\alpha)^3}}$$

ove l'arco $s$ esprime un'iperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1$$

ed insieme

$$s = \frac{b^2 sen\alpha}{\sqrt{a^4 - b^2 sen^2\alpha}}$$

Digitized by Google

allora la sostituzione dei valori ci produce

$$Y = a^2b^2 \int \frac{\cos^2\alpha d\alpha}{\sqrt{(a^2 - b^2 sen^2\alpha)^3}} - \frac{b^2 sen\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2 sen^2\alpha}}$$

$$X = \sqrt{a^2 - b^2 sen^2\alpha}.$$

Per conoscere la forma dell'integrale, che compete alla Y, si differenzi questo, oppure si sostituisca il valore di $s$ nella prima formola del n.° 12; sarà

$$dY = \frac{b^2 sen^2\alpha d\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2 sen^2\alpha}}$$

e ponendo per brevità

$$\frac{b^2}{a^2} = c^2$$

si ottiene

$$dY = \frac{b^2}{a} \frac{sen^2\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - c^2 sen^2\alpha}}.$$

Adoprando la notazione delle funzioni ellittiche di prima e seconda specie, come ha fatto *Legendre*, cioè

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - c^2 sen^2\alpha}} = F(c, \alpha)$$

$$\int d\alpha \sqrt{1 - c^2 sen^2\alpha} = E(c, \alpha),$$

si avrà l'integrale di $dy$, per la formola

$$Y = a\left(F(c, \alpha) - E(c, \alpha)\right)$$

La coesistenza di questa con la X rappresenta l'equa-

Digitized by Google

zione della sviluppata per quella curva, ove fra l'arco e l'ascissa si ha l'equazione di un'iperbola.

Nell'ipotesi di un'iperbola equilatera; $a = b$ ed allora

$$F(c, \alpha) = \int \frac{d\alpha}{cos\alpha} \ , \ E(c, \alpha) = \int cos\alpha d\alpha$$

quindi oltre di essere

$$X = a cos\alpha$$

sarà ancora

$$Y = a\left(\tfrac{1}{2} log. \left(\frac{1 + sen\alpha}{1 - sen\alpha}\right) - sen\alpha\right)$$

Per eliminare l'angolo $\alpha$, basta osservare che

$$Y + a sen\alpha = a log\left(\frac{1 + sen\alpha}{cos\alpha}\right)$$

ed insieme

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - X^2}}{a}$$

e per conseguenza

$$Y + \sqrt{a^2 - X^2} = a log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - X^2}}{X}\right).$$

Tale è l'equazione della sviluppata della curva

$$\left(a e^{\frac{y}{a}} - x\right)^2 = x^2 - a^2.$$

18.° Cerchiamo in fine la sviluppata della curva, ove fra l'arco $s$, e l'ascissa $x$, si verifica l'equazione di una logaritmica, cioè

Digitized by Google

$$s = a\log x$$

e per le formole del n.° 11, abbiamo

$$s = a\log(\operatorname{sen}\alpha) \qquad x = a\operatorname{sen}\alpha$$

$$y = b + a(\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha + \cos\alpha).$$

La sostituzione di questi valori nelle solite espressioni di X, Y, produce

$$Y = b + a(\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha + \cos\alpha) - a\cos\alpha\log(\operatorname{sen}\alpha)$$

$$X = a\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}\alpha\log(\operatorname{sen}\alpha).$$

La sussistenza di queste due equazioni, e l'eliminazione dell'angolo $\alpha$, fornisce la sviluppata della curva

$$e^{\frac{y-b-\sqrt{a^2-x^2}}{a}} = \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$$

Che se si fosse scelta la logaritmica della forma

$$s = e^{\frac{s}{a}}$$

allora avendosi come al n.° 11

$$x = a\log\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad s = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$y = b - \frac{a\pi}{2} + a(\alpha + \cot\alpha)$$

si ottiene per X, Y,

$$Y = b - \frac{\pi\alpha}{2} + a\alpha \qquad X = a\log.\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} - a$$

Digitized by Google

ovvero ponendo $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$ sarà più semplicemente

$$Y = b + a\beta\,, \quad X = a\log.\frac{a}{\cos\beta} - a$$

dalle quali due si ricava col passare dai logaritmi ai numeri

$$e^{\frac{X+a}{a}} = \frac{a}{\cos\beta}\,, \quad \beta = \frac{Y-b}{a}$$

d'onde finalmente

$$e^{\frac{X+a}{a}} = \frac{a}{\cos\left(\frac{Y-b}{a}\right)} = a\sec\left(\frac{Y-b}{a}\right)$$

L'evoluta di questa curva ammette per equazione

$$\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2} = a\,\mathrm{tang}\left(\frac{b-y+\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2}}{a}\right)$$

come è l'ultima formola del n.° 11.

Digitized by Google

ESTRATTO DAL GIORNALE ARCADICO

TOMO LXXIX.

Digitized by Google

Digitized by Google

8

# SOPRA

## LE TRASFORMAZIONI E VALORI

DI ALCUNI

# INTEGRALI DEFINITI

CHE SI RIFERISCONO

## ALLE SUPERFICIE E SOLIDITA' DE' VOLUMI

*SECONDA MEMORIA*


## DI BARNABA TORTOLINI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME
NELL'UNIVERSITA' ROMANA DELLA SAPIENZA
E PROFESSORE DI FISICA NEL COLLEGIO URBANO
DI PROPAGANDA FIDE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI

1840


Digitized by Google

Digitized by Google

# *Memoria sopra le trasformazioni degli integrali*

$$\int\int dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}\,,\quad \int\int\int dxdydz$$

*che riguardano la quadratura delle superficie curve, e la cubatura dei solidi.*

1.° In una mia precedente memoria, pubblicata nello scorso agosto 1839, ed inserita nel tomo LXXX di questo giornale, indicai alcune trasformazioni, ed in certi casi la riduzione eziandio degli integrali, che rappresentano la quadratura delle superficie curve, e la cubatura dei solidi, facendo uso di un genere particolare di coordinate *ellittiche*, delle quali il sig. *Lamè* ha fatto una bella applicazione ad alcune questioni di fisica matematica, riguardanti la teoria del calore. I valori, che ritrovai di alcuni integrali definiti, furono dedotti dalle sole considerazioni geometriche, senza che venissero direttamente verificati: in se-



Digitized by Google

guito, prevalendomi di un artificio dato dal sig. *Poisson*, ho veduto che alle coordinate *ellittiche* potendosi sostituire alcune coordinate trigonometriche, si venivano a verificare direttamente i valori di certi integrali definiti duplicati e triplicati, e a dimostrare di più con facilità ed eleganza il bel *teorema* di *Legendre*, sulle funzioni ellittiche complete di prima e seconda specie a moduli complementari. Non sarà adunque del tutto inutile, che nella presente memoria riassuma in parte ciò che ho trattato nella mia antecedente. A compimento poi farò un cenno delle trasformazioni a coordinate polari. Le applicazioni saranno interamente consecrate alla sfera ed all'ellissoide a tre assi ineguali.

2.° La situazione di un punto nello spazio è completamente determinata per mezzo di tre coordinate rettilinee $x$, $y$, $z$ parallele a tre assi, od anche per tre coordinate polari $r$, $p$, $q$ sostituite alle rettilinee. Il sig. *Lamè* in alcune sue interessanti memorie sulla teoria del calore, inserite nel tom. 2.° e 4.° del giornale del sig. *Liouville*, fa uso di un nuovo genere di coordinate che chiama *ellittiche*, e che consistono in quanto segue.

S'immagini un punto nello spazio, nella comune intersezione di tre superficie curve a parametri continuamente variabili, sarà esso completamente determinato. Si scelgano per esempio le tre superficie curve del secondo ordine dotate di centro, vale a dire l'ellissoide, l'iperboloide da una falda, e l'iperboloide da due falde, e ciascuna ad assi ineguali; allora, per conoscere la legge della variazione dei loro parametri od assi principali, basterà concepire tre quantità variabili $\lambda$, $\mu$, $\nu$, e due costanti $b$, $c$, e per fis-

Digitized by Google

sare le idee sia $b < c$. In questo modo formando le tre equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{\mu^2 - b^2} = 1, \quad \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1 \end{cases}$$

e prendendo $\lambda$ maggiore di $b$ e $c$, il parametro $\mu$ compreso fra $b$, $c$, ed infine il parametro $\nu$ più piccolo di $b$, la prima rappresenta un ellissoide, la seconda un iperboloide da una falda, e la terza un iperboloide da due falde, e tutte ad assi ineguali.

Dalla forma dell'equazioni (1) si vede come dato un punto si potrà sempre determinare per mezzo delle nuove coordinate $\lambda$, $\mu$, $\nu$, ma non si potrà già stabilire, che date le tre superficie del second'ordine determinino esse la situazione di un punto, mentre otto sono i punti d'intersezione. Di un gran numero di belle proprietà godono le superficie (1) nella loro esistenza simultanea: e basterà quì indicare che queste superficie sono *ortogonali* ed *omofocali*, tal'è il nome attribuitogli dal sig. *Lamè*, mentre le sezioni principali hanno i medesimi fuochi; e di più si segano nelle loro linee di curvatura. Il sig. *Binet* però fa osservare che le enunciate proprietà avea egli dimostrate fin dal 1811 in una sua memoria sui momenti d'inerzia.

3.° Essendo le coordinate $x$, $y$, $z$ determinate da tre equazioni, si potrà con le ordinarie regole dell'eliminazione dedurre il valore di ciascuna coordinata in funzione delle nuove $\lambda$, $\mu$, $\nu$, ed avremo

Digitized by Google

$$(2)\begin{cases} bcx=\lambda\mu\nu\,,\quad b\sqrt{c^2-b^2}.y=\sqrt{\lambda^2-b^2}.\sqrt{\mu^2-b^2}.\sqrt{b^2-\nu^2}. \\ c\sqrt{c^2-b^2}.z=\sqrt{\lambda^2-c^2}.\sqrt{c^2-\mu^2}.\sqrt{c^2-\nu^2}. \end{cases}$$

Questi valori sono eziandio inclusi in un'equazione di sesto grado, riguardo ad una delle variabili $\lambda$, $\mu$, $\nu$. In fatti se la prima dell'equazioni (1) si ordini per le potenze di $\lambda$, risulta

$$\lambda^6 - A\lambda^4 + B\lambda^2 - C = 0,$$

ove i coefficienti A, B, C sono

$$A = x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - c^2$$

$$B = x^2(b^2 + c^2) + y^2c^2 + z^2b^2 + b^2c^2$$

$$C = b^2c^2x^2.$$

Dall' equazione di sesto grado si scorge che le $\mu$, $\nu$ ancora delle due iperboloidi, sono radici che la verificano: e per conseguenza

$$A = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2$$

$$B = \lambda^2\mu^2 + \lambda^2\nu^2 + \mu^2\nu^2\,,\quad C = \lambda^2\mu^2\nu^2$$

nelle quali eliminando $x^2, y^2, z^2$ si trovano le prime equazioni di questo n.°

3.° Alcune volte invece delle tre superficie (1) si possono scegliere tre varietà di esse; per esempio la sfera per l'ellissoide, e due coni obliqui o a base el-

Digitized by Google

littica invece delle due iperboloidi. Chiamando in questo caso $r$ il parametro della sfera od il raggio, $b$, $c$ due costanti ove sia $b < c$, $\mu$ un parametro variabile, e compreso fra $b$, $c$, ed un altro $\nu$ più piccolo di $b$, si avranno le tre equazioni

$$(3)\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \quad \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0. \end{cases}$$

La seconda di queste equazioni appartiene ad un cono obliquo, o a base ellittica, ed assintotico all'iperboloide da una falda, e la terza un cono obliquo della medesima specie, ed assintotico all' iperboloide da due falde. Le coordinate $x, y, z$ si esprimono in funzione delle nuove $r$, $\mu$, $\nu$ per mezzo delle formole

$$(4)\begin{cases} bcx = r\mu\nu, \quad b\sqrt{c^2 - b^2}.y = r\sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{b^2 - \nu^2} \\ c\sqrt{c^2 - b^2}.z = r\sqrt{c^2 - \mu^2}.\sqrt{c^2 - \nu^2}. \end{cases}$$

La sfera ed i coni delle indicate equazioni sono tre superficie ortogonali: nell'ipotesi che la $r$ sia costante le $x$, $y$, z appartengono ad una sfera, e potranno utilmente applicarsi alla ricerca di alcuni integrali definiti, come può vedersi nella mia citata memoria, e come farò brevemente alla fine della presente.

4.° Non sono però queste le sole coordinate, con le quali si trasformi un sistema di $x$, $y$, $z$; infatti se chiamando $r$ un raggio vettore condotto dall'origine ad un punto situato nello spazio, e $\varphi$, $\theta$, due angoli variabili, ed $\alpha$, $\beta$ due costanti positive, e tali da verificare costantemente

Digitized by Google

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

le $x$, $y$, $z$ si esprimeranno anche per le nuove formole

$$(5)\begin{cases} x = r\,sen\varphi\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta} \\ y = r\cos\varphi\cos\theta\,,\quad z = r\,sen\theta\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}. \end{cases}$$

Queste tre verificano

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

mentre è evidente che in forza della condizione assegnata ad $\alpha$, $\beta$ si ha

$$sen^2\varphi\,(1-\alpha^2 sen^2\theta) + \cos^2\varphi\cos^2\theta + sen^2\theta\,(1-\beta^2 sen^2\varphi) = 1.$$

Per calcolare con le $x, y, z$ un'estensione simmetrica attorno l'origine delle coordinate, e circoscritta da una superficie curva, venendo tagliata dai piani coordinati in otto parti eguali, basterà prendere i limiti 0, ed $\frac{1}{2}\pi = 90^\circ$ per gli angoli $\varphi$, $\theta$; mentre allora un dato integrale definito entro i limiti delle coordinate positive rappresenterà l' ottava parte dell' estensione simmetrica; e l' ipotesi di $r$ costante include il caso della sfera; i medesimi valori delle $x$, $y$, $z$ si applicano ad un ellissoide di assi principali $2a$, $2b$, $2c$, quando alle formole (5) si sostituiscano

$$(6)\begin{cases} x = a\,sen\varphi\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta} \\ y = b\cos\varphi\cos\theta\,,\quad z = c\,sen\theta\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi} \end{cases}$$

Digitized by Google

ed in queste si verifica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

È importante di osservare che sì l'equazione dell'ellissoide, che della sfera seguita a verificarsi se una delle quantità $\alpha$, $\beta$ si annulli. Così annullandosi per esempio la $\alpha$ sarà $\beta = 1$, e le formole (5) e (6) si riducano ad

$$x = r\,sen\varphi\,,\quad y = r\cos\varphi\cos\theta\,,\quad z = r\,sen\theta\cos\varphi$$

$$x = a\,sen\varphi\,,\quad y = b\cos\varphi\cos\theta\,,\quad z = c\,sen\theta\cos\varphi$$

e si avrà costantemente

$$sen^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\theta + sen^2\theta\cos^2\varphi = 1,$$

e sono le cognite espressioni a coordinate polari.

5. Le precedenti formole, o vele $x, y, z$, sono date in coordinate $r, \varphi, \theta$ e per le costanti $\alpha, \beta$, includono i valori di $x, y, z$ in coordinate ellittiche $r, \mu, \nu$. Infatti essendo $\mu$ una quantità compresa fra $b, c$, e $\nu$ minore di $b$, si faccia con il sig. *Poisson* (*)

$$\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - \mu^2} = \cot^2\theta\,,\quad \nu = b\,sen\varphi$$

d'onde

(*) Liouville, Iournal, vol. 2.

Digitized by Google

$$\mu^2 = c^2 - (c^2 - b^2)\, sen^2\theta.$$

Di più supposto $c > b$ faremo

$$b = \beta c \qquad c^2 - b^2 = c^2\alpha^2,$$

ed $\alpha$, $\beta$ verificheranno la condizione

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Sostituendo pertanto questi valori in luogo di $\mu^2$, $\nu^2$ nelle formole (4) troveremo dopo facili riduzioni le $x$, $y$, $z$ espresse in $\varphi$, $\theta$, $\alpha$, $\beta$ come le formole (5). Gl'integrali, dei quali abbiamo parlato, verranno trasformati ed a coordinate $\lambda$, $\mu$, $\nu$ ed a coordinate $r$, $\varphi$, $\theta$, non mancando quì di premettere che se $\lambda$ sia il semiasse maggiore di un ellissoide, ed $f(\lambda)$ $f_1(\lambda)$ gli altri due, ove sia necessariamente

$$\lambda > f(\lambda) > f_1(\lambda)$$

l'equazioni dell'ellissoide saranno

$$x = \lambda sen\varphi \sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta}$$

$$y = f(\lambda)\cos\varphi\cos\theta, \quad z = f_1(\lambda)\, sen\theta\sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}.$$

Le quantità $f(\lambda)$ $f_1(\lambda)$ sono due funzioni di $\lambda$, da verificare la già indicata condizione. Così supponendo

$$f(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - b^2}, \quad f_1(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - c^2}$$

Digitized by Google

questi ultimi valori di $x$, $y$, $z$ saranno analoghi a quei delle formole (a) nel num.° 3. Ma prima di venire a questo genere di trasformate, facciamo un cenno delle cognite trasformazioni a coordinate polari, come ci eravamo proposti nel principio della presente memoria.

6.° Un punto nello spazio a coordinate rettangolari $x$, $y$, $z$ si riporta a coordinate polari $r$, $p$, $q$ per le formole

$$x = r\cos p, \quad y = r\,\mathrm{sen}p\cos q, \quad z = r\,\mathrm{sen}p\,\mathrm{sen}q$$

e sostituita nell'equazione generica della superficie

$$f(x, y, z) = 0$$

verrà il raggio vettore funzione degli angoli $p$, $q$, cioè

$$r = \mathrm{F}(p, q),$$

L'integrale duplicato per la quadratura delle superficie curve è

$$\mathrm{S} = \int\int dxdy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

si trasforma in coordinate $p$, $q$ per mezzo delle formole

$$\mathrm{S} = \int\int dpdq \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}$$

ove

$$\mathrm{X} = y_1z' - z_1y', \quad \mathrm{Y} = x_1z' - x'z_1, \quad \mathrm{Z} = x_1y' - x'y_1,$$

Digitized by Google

ed insieme $x'$, $y'$, $z'$; $x_1$ $y_1$ $z_1$ sono le derivate parziali delle $x$, $y$, $z$ riguardo alle variabili $p$, $q$. Ciò posto, nel prendere queste parziali derivate, si chiamino $r'$, $r_1$ le corrispondenti della $r$ riguardo alle medesime $p$, $q$, sarà

$$x' = r'cosp - ysenp\,, \quad x_1 = r_1 cosp$$

$$y' = rcospcosq + r'senpcosq\,, \quad y_1 = r_1 senpcosq - rsenpsenq$$

$$z' = rcospseng + r'senpseng\,, \quad z_1 = rsenpcosq + r_1 senpseng$$

Formando le indicate differenze di prodotti dalla rappresentanza delle X, Y, Z verrà con facilità

$$X = r^2 senpcosp + rr'sen^2 p$$

$$Y = rr_1 seng - (r'cosp - rsenp)\, rsenpcosq$$

$$Z = rr_1 cosq + (r'cosp - rsenp)\, rsenpseng$$

Elevando al quadrato, e sommando, ed avvertendo che

$$(rsenp - r'cosp)^2 + (rcosp + r'senp)^2 = r^2 + r'^2$$

risulterà

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2 (r_1^2 + (r^2 + r'^2) sen^2 p)$$

quindi l'integrale raddoppiato, e riferito a coordinate polari si riduce ad

$$S = \int\int R r dp dq$$

Digitized by Google

quando per brevità

$$R = \sqrt{r_1^2 + (r^2 + r'^2)\, sen^2 p}.$$

Il valore della S è conforme a quanto trova il sig. *Bordoni* nel vol. I° delle sue Lezioni di calcolo p.378.

7.° Un' importante applicazione trovasi nell'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ove sostituendo le coordinate polari $r, p, q$ deducesi

$$r = \frac{abc}{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}$$

se per semplicità si ponga

$$A = b^2c^2\ ,\ B = a^2c^2\ ,\ C = a^2b^2$$

$$u = cosp\ ,\ v = senpcosq\ ,\ w = senpsenq$$

Si prendano ora le derivate parziali della $r$, riguardo agli angoli $p$, $q$, avremo

$$r' = \frac{-abc\,(B cos^2 q + C sen^2 q - A)\, senpcosq}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r_1 = \frac{-abc\,(C - B)\, sen^2 psenqcosq}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Digitized by Google

Ed elevando la $r$ al quadrato, e sommando con $r'^2$ si ha

$$r^2+r'^2=\frac{a^2b^2c^2\,(A^2cos^2p+(Bcos^2q+Csen^2q)^2sen^2p)}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^3}$$

Quindi moltiplicando per $sen^2p$, e sommando con $r_1^2$ si ottiene dopo facile riduzione il valore della R, cioè

$$R=abcsenp\,\frac{(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Infine l'intera superficie dell'ellissoide, prendendo $p$ entro i limiti di o, $\pi=180$, e $q$ entro $\pi$, $-\pi$ è inclusa nell'integrale definito doppio

$$S=a^2b^2c^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} senpdpdq\,\frac{(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^2}$$

Si può mettere in un significato geometrico, quando chiamando N la perpendicolare abbassata dal centro dell' ellissoide sulla direzione del piano tangente, si trova

$$N=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}=\frac{a^2b^2c^2}{r\,(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ed insieme

$$r=\frac{abc}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Digitized by Google

dunque

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{r^3 sen p dp dq}{N}$$

Una prima integrazione riguardo a $p$ è sempre possibile ad eseguirsi co' noti metodi, e col ridurre l'integrale doppio ad un integrale semplice: ma di questo quì non parlo, e l'integrale duplicato quì trovato non è il più comodo per iscuoprire la superficie dell'ellissoide. Infatti chiamando $\theta$, ed $\omega$ due altre coordinate polari, e simili alle $p$, $q$; l'equazione dell'ellissoide è inclusa nelle formole

$$x = a cos\theta \ , \quad y = b sen\theta cos\omega \ , \quad z = c sen\theta sen_{\omega}$$

Si prendano ancora in queste le derivate parziali riguardo a $\theta$, ed $\omega$ sarà

$$x' = -a sen\theta, \ x_1 = 0, \ y' = b cos\theta cos\omega, \ y_1 = -b sen\theta sen\omega$$
$$z' = c sen\omega cos\theta \ , \ z_1 = c sen\theta cos\omega$$

cosicchè le cognite differenze di prodotti X, Y, Z divengono

$$X = bc sen\theta cos\omega, \ Y = ac sen^2\theta cos_{\omega}, \ Z = -ab sen^2\theta sen\omega$$

Elevandole al quadrato, e sommandole si otterrà

$$\surd X^2 + Y^2 + Z^2 = \surd A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2$$

quando per brevità si scriva

$$\xi = cos\theta \ , \ \eta = sen\theta cos\omega \ , \ \zeta = sen\theta sen\omega$$

Digitized by Google

e perciò la quadratura dell'ellissoide dipenderà dall' integrale definito doppio

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} sen\theta d\theta d\omega \sqrt{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}$$

mentre i limiti di $\theta$, ed $\omega$ sono gli stessi che di $p$, $q$; sotto un significato geometrico si pone col chiamare N la perpendicolare abbassata dal centro sulla direzione del primo tangente, e sarà

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{abc}{\sqrt{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}}$$

d'onde

$$S = abc \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{sen\theta d\theta d\omega}{N}$$

Tal'è la formola, sullo sviluppo della quale arrivasi ad un importante risultato trovato dal sig. *Legendre* sulla quadratura dell'ellissoide, come può vedersi nella mia memoria inserita nel tomo LXXVIII di questo giornale, e pubblicata in data dei 20 marzo 1839. Ad una formola simile, ed a sviluppi analoghi era già arrivato il sig. *Legendre*, ed anche il sig. *Plana*, come già avea nella mia medesima memoria osservato. Ma lo scopo principale da prefiggersi è di ridurre l'integrale definito doppio, in un altro integrale definito semplice: e su questo merita particolar attenzione una elegante memoria del sig. *E. Catalan* pubblicata nel fascicolo del mese di luglio 1839 del giornale del sig. *Liouville*, e che riporterò qui in poche parole.

Digitized by Google

8.° I valori di $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ espressi in coordinate $x$, $y$, $z$ sono

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

d' onde chiamando S l' ottava parte della superficie, avremo l'integrale doppio

$$S = \int\int dxdy \sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

I limiti dell'integrale sono per tutti i valori positivi delle coordinate $x$, $y$, e da verificare la condizione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Ciò posto, supponendo $a > b > c$ si ponga per brevità

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = m^2 \qquad 1 - \frac{c^2}{b^2} = n^2$$

ed insieme

$$\frac{x}{a} = x', \quad \frac{y}{b} = y' \quad \text{ed} \quad S = mnS'$$

si avrà per la S' l'integrale

Digitized by Google

$$S' = \int\int dx'dy' \sqrt{\frac{1 - m^2x'^2 - n^2y'^2}{1 - x'^2 - y'^2}}$$

e dovrà esser questo definito per tutti i valori positivi di $x'$, $y'$, con la condizione di

$$x'^2 + y'^2 = 1$$
$$<$$

Facendo inoltre

$$z' = \sqrt{\frac{1 - m^2x'^2 - n^2y'^2}{1 - x'^2 - y'^2}}$$

e l'integrale S' diviene

$$S' = \int\int z'dx'dy'$$

Ora quest'ultimo integrale rappresenta un solido, nel quale l'elemento dell'area è $dx'dy'$, e l'altezza $z'$ : ma avvertendo che in forza del valore di $z'$ dovendosi verificare

$$(z'^2 - m^2)x'^2 + (z'^2 - n^2)y'^2 = z'^2 - 1 \quad \ldots (i)$$

l'integrale S' si ridurrà semplicemente ad

$$S' = \int z'dA$$

purchè A rappresenti una area, della quale l'elemento sia $dx'dy'$, ed ove

$$A = \int\int dx'dy'$$

Digitized by Google

verifichi costantemente l'equazione (*i*); ora questa rappresenta un ellissi, ed i limiti di $z'$ saranno 1 ed $\infty$, mentre a $z' = 1$ si ha $x' = 0$, $y' = 0$, ed a $z = \infty$ ci corrisponde

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

dunque

$$dA = \frac{d\left(\iint dx'dy'\right)dz'}{dz'}$$

D'altronde l'area dell'ellissi di equazione (*i*) è

$$\pi \sqrt{\frac{z'^2 - 1}{z'^2 - m^2}} \cdot \sqrt{\frac{z'^2 - 1}{z'^2 - n^2}}$$

e non potendo A entro i limiti delle coordinate positive rappresentare che la quarta parte dell'area ellittica, sarà

$$A = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{z'^2 - 1}{z'^2 - m^2}} \cdot \sqrt{\frac{z'^2 - 1}{z'^2 - n^2}}$$

per cui

$$S' = \frac{\pi}{4} \int_1^\infty z'\,d \cdot \sqrt{\frac{z'^2 - 1}{z'^2 - m^2}} \cdot \sqrt{\frac{z'^2 - 1}{z'^2 - n^2}}$$

Eseguendo l'indicata differenziazione, riducendo e facendo in fine

$$P = \int_1^\infty \frac{z'^2 dz'}{\sqrt{z'^2 - m'^2} \cdot \sqrt{z'^2 - n^2}}$$



Digitized by Google

si avrà

$$S' = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1-m^2}{m}\frac{dP}{dm} + \frac{1-n^2}{n}\frac{dP}{dn}\right)$$

dunque l'ottava parte della superficie dell' ellissoide sarà

$$S = \frac{\pi}{4}\left\{n(1-m^2)\frac{dP}{dm} + m(1-n^2)\frac{dP}{dn}\right\}$$

Con questa formola i due integrali definiti, e duplicati a coordinate polari $p$, $q$, od $\theta$, $\omega$, per la superficie dell'ellissoide sono ridotti ad un integrale definito semplice. Non sarebbe poi difficile il trasformare quest'ultimo in funzioni ellittiche di prima e seconda specie, come può vedersi nella citata memoria del sig. *Catalan*.

9.° Vengo presentemente a fare un paragone degli integrali indefiniti duplicati ottenuti nei precedenti paragrafi, a coordinate polari $p$, $q$ ed $\omega$, $\theta$; questo si ha dall'eguaglianza

$$\int\int \frac{r^3 sen p dp dq}{N} = abc \int\int \frac{sen\theta d\theta d\omega}{N}$$

dalla quale risulta evidentemente

$$r^3 sen p dp dq = abc sen\theta d\theta d\omega$$

ed integrando entro i soliti limiti, e con la sostituzione del valore di $r$.

Digitized by Google

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{senpdpdq}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{a^2b^2c^2}=\frac{4\pi}{A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}}$$

Quest'integrale definito è di già cognito, e trovasi compreso come caso particolare in una formola generale data dal sig. *Poisson* (*) in una memoria composta nel 1819; la medesima fù dimostrata dal sig. *Cauchy* nel 19 fascicolo del giornale della scuola politecnica, e nel quinto volume degli esercizi di matematica. Avvertendo poi che i limiti di $p, q$ coincidono con quei di $\theta$, $\omega$, si avrà l'integrale definito trasformato

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{r^3senpdpdq}{N}=abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{senpdpdq}{r}$$

Sieno ora $a'$, $b'$ gli semiassi maggiore e minore di una sezione diametrale parallela al piano tangente dell'ellissoide, si avrà per le note proprietà di questa superficie

$$abc=a'b'N$$

e quindi

$$S=\int\int a'b'sen\theta d\theta d\omega$$

dalla quale

$$\frac{d^2S}{a'b'}=sen\theta d\theta d\omega$$

(*) Si veda la nota alla fine di questa memoria.

Digitized by Google

Integrando entro i soliti limiti, e dividendo per $\pi$, abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{d^2S}{\pi a' b'} = 4$$

Quest'ultima formola ci dice, che la somma degli elementi superficiali di un ellissoide divisa per le aree delle sezioni diametrali, e paralleli ai piani tangenti di questi elementi, è eguale a 4. Tal'è la proposizione che il sig. *Chasles*, nel vol. 3 pag. 13 del giornale del sig. *Liouville*, dice aver dimostrato con la sola geometria.

9.° Voglio ora eseguire un paragone immediato delle coordinate $p$, $q$ con le $\theta$, $\omega$. Ritenute le denominazioni di $u$, $v$, $w$, e di $\xi$, $\eta$. $\zeta$, si avrà

$$x = ru\,, \quad y = rv\,, \quad z = rw$$

$$x = a\xi\,. \quad y = b\eta\,, \quad z = c\zeta$$

d'onde

$$\xi = \frac{u\sqrt{A}}{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}$$

$$\eta = \frac{v\sqrt{B}}{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}$$

$$\zeta = \frac{w\sqrt{C}}{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}$$

Viceversa, essendo per le polari $\theta$, $\omega$

Digitized by Google

$$r = \sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}$$

si avrà

$$u = \frac{a\xi}{\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}}$$

$$v = \frac{b\eta}{\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}}$$

$$w = \frac{c\zeta}{\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}}$$

Se poi in queste equazioni si ponga

$$a'^2 = b^2\cos^2\omega + c^2\operatorname{sen}^2\omega$$

e si divida la terza per la seconda, e si sostituiscano i valori di $u$, $v$, $w$, avremo

$$\cos p = \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + a'^2\operatorname{sen}^2\theta}}, \quad \operatorname{tang} q = \frac{c}{b}\operatorname{tang}\omega$$

Se vogliasi ora differenziare $\cos p$, conviene considerare $\omega$ come costante, in forza del valore di $\operatorname{tang} q$, e sarà

$$\operatorname{sen} p\, dp = \frac{aa'^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta + a'^2\operatorname{sen}^2\theta)^3}}$$

E nello stesso modo differenziando $\operatorname{tang} q$

Digitized by Google

$$dq\,(\,1 + tang^2 q\,) = \frac{c}{b}\,(\,1 + tang^2\omega\,)\,d\omega$$

e più semplicemente

$$dq = \frac{bcd\omega}{a'^2}$$

E quindi

$$senpdpdq = \frac{abcsen\vartheta d\vartheta d\omega}{(\,a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2\,)^{\frac{3}{2}}}$$

Dai medesimi valori poi di $u, v, w$ espressi in $\xi, \eta, \zeta$ formiamo

$$(\,Au^2 + Bv^2 + Cw^2\,)^2 = \frac{(\,Aa^2\xi^2 + Bb^2\eta^2 + Cc^2\zeta^2\,)^2}{(\,a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2\,)^2}$$

ed insieme

$$(\,A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2\,)^{\frac{1}{2}} = \frac{(A^2a^2\xi^2 + B^2b^2\eta^2 + C^2c^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\,a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2\,)^{\frac{1}{2}}}$$

Sostituendo in fine nei secondi membri di queste equazioni, i valori di A, B, C, ed osservando che

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

si avrà semplicemente

Digitized by Google

$$( Au^2 + Bv^2 + Cw^2 )^2 = \frac{a^4b^4c^4}{( a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 )^2}$$

$$(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{abc\,( A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 )^{\frac{1}{2}}}{( a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 )^{\frac{1}{2}}}$$

Con queste formole tutto è pronto per dimostrare che

$$\frac{r^3 sen p dp dq}{N} = \frac{abc sen\theta d\theta d\omega}{N}$$

10. Veniamo a fare una parola delle medesime trasformazioni nella formola per la cubatura de'solidi di forma qualunque ; questa è inclusa nel triplo integrale

$$V = \int\int\int dx dy dz$$

Dalle trasformazioni degli integrali si sà, che se $r, p, q$ sieno tre altre coordinate che in relazione con le antecedenti $x, y, z$ si esprimano per

$$dx = \alpha dr + \beta dp + \gamma dq$$

$$dy = \alpha' dr + \beta' dp + \gamma' dq$$

$$dz = \alpha'' dr + \beta'' dp + \gamma'' dq$$

allora si dovrà sostituire

$$V = \int\int\int [\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') + \beta''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma) + \gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta')] \, dr dp dq.$$

Digitized by Google

Nel nostro caso

$$x = r\cos p \ , \quad y = r\,\mathrm{sen}p\cos q \ , \quad z = r\,\mathrm{sen}p\,\mathrm{sen}q$$

e differenziando

$$dx = \cos p dr - r\,\mathrm{sen}p dp$$

$$dy = \mathrm{sen}p\cos q dr + r\cos p\cos q dp - r\,\mathrm{sen}p\,\mathrm{sen}q dq$$

$$dz = \mathrm{sen}p\,\mathrm{sen}q dr + \cos p\,\mathrm{sen}q dp + \mathrm{sen}p\cos q dq$$

d'onde formando le indicate differenze di prodotti che sono entro i vincoli $\int\int\int$ .... avremo

$$\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') = -r^2\mathrm{sen}^3p\,\mathrm{sen}^2q$$

$$\beta''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma) = -r^2\mathrm{sen}p\cos^2p\,\mathrm{sen}^2q$$

$$\gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta') = -r^2.\mathrm{sen}p\cos^2q$$

e sommandole

$$V = \int\int\int r^2\mathrm{sen}p dp dq dr$$

Ed integrando entro i limiti o, $r$ si riduce a

$$V = \frac{1}{3}\iint r^3\mathrm{sen}p dp dq$$

Nell'ipotesi di un ellissoide

$$r = \frac{abc}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Digitized by Google

e per conseguenza il volume V sarà

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{a^3 b^3 c^3 senpdpdq}{3(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}$$

E per l'integrale definito doppio trovata al n.° 9 si avrà infine

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

Tal' è il volume di un ellissoide ad assi ineguali e può dedursi da considerazioni geometriche ancor più semplici ; ma di questo si è parlato per fare un' applicazione delle coordinate polari. Se si fossero volute usare immediatamente l'equazioni dell'ellissoide

$$x = a\cos\theta \,, \quad y = b\,sen\theta\cos\omega \,, \quad z = c\,sen\theta\,sen\omega$$

allora il triplo integrale V si trasforma considerando $a$ come variabile, e $b$, $c$ come funzioni di $a$, e se $c$ rappresenta l'asse più piccolo, i limiti dell'integrale per la $a$ saranno $a$, $\sqrt{a^2 - c^2}$; contuttociò avendo presentato negli antecedenti numeri il paragone delle variabili $p$, $q$ con le $\theta$, $\omega$, sarà per una formola data al n.° 9.

$$r^3 senpdpdq = abcsen\theta d\theta d\omega$$

dunque il volume dell'ellissoide

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{abcsen\theta d\theta d\omega}{3} = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Digitized by Google

11.° Passiamo adesso alla trasformazione dei soliti integrali per mezzo delle variabili $\varphi$, $\theta$; come si ha dalle formole di già stabilite al n.° 4.° Queste sono i valori delle coordinate $x$, $y$, $z$, cioè

$$x = r\,sen\varphi\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta}$$

$$y = r\cos\varphi\cos\theta\,, \quad z = r\,sen\theta\sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}$$

Chiamando al solito $x'$, $y'$, $z'$ . $x_1$, $y_1$, $z_1$ le derivate parziali delle $x, y, z$ riguardo alle variabili $\varphi, \theta$, e prendendo $r$ costante, i risultati che si otterranno appartengono alla sfera, ed avremo

$$x' = r\cos\varphi\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta}\,, \quad x_1 = -\frac{r\alpha^2 sen\varphi\,sen\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta}}$$

$$y' = -\,r\,sen\varphi\cos\theta\,, \qquad y_1 = -\,r\cos\varphi\,sen\theta$$

$$z' = -\frac{r\beta^2 sen\varphi\cos\varphi\,sen^\theta}{\sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}}\,, \quad z_1 = r\cos\theta\sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}$$

Formando adesso i valori di X, Y, Z del n.° 6° ed avvertendo che

$$1 - \alpha^2 sen^2\theta - \beta^2 sen^2\varphi = \alpha^2\cos^2\theta + \beta^2\cos^2\varphi$$

sarà a riduzioni eseguite

Digitized by Google

$$X = \frac{r^2 sen\varphi \left( \alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi \right) \sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta}}{\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}}$$

$$Y = - \frac{r^2 \left( \alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi \right) cos\varphi cos\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}}$$

$$Z = \frac{r^2 sen\theta \left( \alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi \right) \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}}{\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}}$$

Facendone i quadrati, e sommati, e sostituendoli nel consueto valore di S, si ha

$$S = r^2 \int\int \frac{\left( \alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi \right)}{\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}} d\varphi d\theta$$

Ed integrando entro i limiti o, ed $\frac{1}{2}\pi$ per gli angoli $\varphi$, $\theta$ si dedurrà l'ottava parte della superficie sferica, cioè

$$S = \frac{\pi r^2}{2}$$

Ciò si può verificare direttamente coll' avvertire che il valore di S, preso entro i detti limiti, rimane lo stesso, se una delle quantità $\alpha$, $\beta$ si annulli, così a $\beta = 0$ corrispondendo $\alpha = 1$ l'integrale si riduce ad

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos\theta d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Dunque sarà eziandio

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left( \alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi \right)}{\sqrt{1 - \alpha^2 sen^2\theta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}} d\varphi d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Digitized by Google

In questo integrale definito duplicato consiste il teorema di *Legendre* sulle funzioni ellittiche complete di prima e seconda specie a moduli complementari. infatti riproducendo l'integrale sotto la forma

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\alpha^2 sen^2\theta-\beta^2 sen^2\varphi)}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,.\,\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}}\,d\varphi d\theta = \frac{\pi}{2}$$

e facendo uso della notazione di *Legendre*

$$F(\alpha,\theta)=\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}},\quad E(\alpha,\theta)=\int d\theta\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}$$

e nel caso che sieno complete

$$F(\alpha)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}},\quad E(\alpha)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\theta\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}$$

sarà anche

$$\int\frac{sen^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}}=\frac{1}{\beta^2}\Big(F(\beta,\varphi)-E(\beta,\varphi)\Big)$$

$$\int\frac{sen^2\theta d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}}=\frac{1}{\alpha^2}\Big(F(\alpha,\theta)-E(\alpha,\theta)\Big)$$

Perciò entro i convenuti limiti l'integrale si decomporrà nei seguenti

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,.\,\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}}=F(\alpha)\,F(\beta)$$

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\alpha^2 sen^2\theta d\theta d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,.\,\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}} = F(\beta)\Big(F(\alpha) - E(\alpha)\Big)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\beta^2 sen^2\varphi d\varphi d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 sen\theta}\,.\,\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}} = F(\alpha)\Big(F(\beta) - E(\beta)\Big)$$

con queste sostituzioni abbiamo evidentemente

$$F(\alpha)\,E(\beta) + F(\beta)\,E(\alpha) - F(\alpha)\,F(\beta) = \frac{\pi}{2}$$

In questa formola consiste il mentovato teorema di *Legendre*: ed ognun vede con qual facilità sia stato dedotto per mezzo degli antecedenti principii.

12.° Con egual modo si ottiene la trasformata della solita espressione S nel caso di un ellissoide ad assi ineguali; mentre allora riprendendo le formole (6) del n.° 4.° sarà

$$x = a sen\varphi \sqrt{1 - \alpha sen^2\theta}$$

$$y = b cos\varphi cos\theta\,, \qquad z = c sen\theta \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}$$

e prendendo le derivate parziali, abbiamo

$$x' = a cos\varphi \sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,, \quad x_1 = -\frac{a\,\alpha^2 sen\varphi sen\theta cos\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 sen\theta^2}}$$

$$y' = -\,b cos\theta sen\varphi, \quad y_1 = -\,b cos\varphi sen\theta$$

$$z' = -\frac{c\beta^2 sen\varphi cos\varphi sen\theta}{\sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}} \qquad z_1 = c cos\theta \sqrt{1 - \beta^2 sen^2\varphi}$$

Digitized by Google

Quindi formando le differenze X, Y, Z sarà

$$X = \frac{bc\,sen\varphi\,(\alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi)\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,.\,\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}}$$

$$Y = \frac{-ac\,(\alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi)\,cos\varphi cos\theta}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,.\,\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}}$$

$$Z = \frac{ab\,sen\theta\,(\alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi)\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}}{\sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,.\,\sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}}$$

Facendo la somma dei quadrati, sostituita nel valore generico della S, ed integrando entro i limiti 0, $\frac{1}{2}\pi$ per ambedue le variabili $\varphi$, $\theta$, si avrà l'ottava parte della superficie dell'ellissoide, cioè

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\alpha^2 cos^2\theta + \beta^2 cos^2\varphi)\,R}{\Delta\Delta'}\,d\varphi d\theta$$

quando per brevità si ponga

$$\Delta = \sqrt{1-\alpha^2 sen^2\theta}\,,\quad \Delta' = \sqrt{1-\beta^2 sen^2\varphi}$$

$$R = \sqrt{a^2b^2 sen^2\theta\Delta'^2 + a^2c^2 cos^2\varphi cos^2\theta + b^2c^2 sen^2\varphi\Delta^2}.$$

E siccome il finale risultato sarà lo stesso annullandosi una delle quantità $\alpha$, $\beta$; così facendo $\beta = 0$, corrispondendo $\alpha = 1$, il valore della S si riduce ad

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R' cos\theta d\theta d\varphi$$

Digitized by Google

ove per brevità

$$R' = \sqrt{a^2b^2sen^2\vartheta + a^2c^2cos^2\varphi cos^2\theta + b^2c^2sen^2\varphi cos^2\theta}$$

Tutto ciò è conforme all'ultima formola del n.° 7. Di più ritenendo sempre per N la perpendicolare abbassata dal centro sulla direzione del primo tangente, avremo fra gli integrali definiti la relazione

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\alpha^2cos^2\theta+\beta^2cos^2\varphi)R}{\Delta\Delta'}\, d\varphi d\theta = abc \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{cos\vartheta d\theta d\varphi}{N}$$

Di quì si vede che la superficie dell'ellissoide ad assi ineguali è indipendente dai valori di $\alpha$, $\beta$, a meno che i semiassi $a$, $b$, $c$ non fossero funzioni di $\alpha$, $\beta$. Infatti la superficie totale dell' ellissoide, quando si prenda, $a < b < c$, è

$$S = 2\pi a^2 + \frac{2\pi bc}{\alpha}\Big((1-\alpha^2)\,F(k,\psi) + \alpha^2 E(k,\psi)\Big)$$

ove la quantità $\alpha < 1$ è data dalla formola

$$\alpha^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

ed il modulo $k = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{\alpha c}$; l' ampiezza $\psi$ determinata dalla condizione $sen\psi = \alpha\gamma$, e fare dopo l'integrazione nelle funzioni ellittiche $\gamma = 1$.

Dopo questo sarà facile il vedere che ritenendo per $\alpha$, $\beta$ i valori

Digitized by Google

$$\alpha^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \qquad \beta^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

verificandosi $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ avremo la riduzione dell' integrale definito duplicato

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\alpha^2\cos\theta + \beta^2\cos^2\varphi)\,R}{\Delta\Delta'}\,d\varphi d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(a^2 + \frac{bc}{\alpha}\,(\alpha^2 E(k,\psi) + \beta^2 F(k,\psi))\right)$$

Sarà però utile di osservare che in quest'ultima formola l'ipotesi di $\alpha = 0$, o di $\beta = 1$ ci conduce ad un ellissoide di rivoluzione.

13.° Trasformazioni simili devono eseguirsi per un qualche triplo trascendente di funzioni ellittiche, che otterremo mediante il volume di un ellissoide. A questo oggetto, riprendendo le prime formole dell'antecedente numero, si considerino $b$, $c$ come funzioni di $a$, cioè $b = f(a)$, $c = f(a)$; e differenziandoli completamente riguardo anche ad $a$, sarà con facilità

$$dx = \Delta\,sen\varphi da + a\Delta\cos\varphi d\varphi - \frac{a\alpha^2 sen\varphi sen\theta\cos\theta d\theta}{\Delta}$$

$$dy = f'(a)\cos\varphi\cos\theta da - f(a)sen\varphi\cos\theta d\varphi - f(a)\cos\varphi sen\theta d\theta$$

$$dz = f'(a)\Delta' sen\theta da - \frac{\beta^2 f(a)sen\varphi\cos\varphi sen\theta d\varphi}{\Delta'} + f(a)\Delta'\cos\theta d\theta$$

Digitized by Google

Paragonando queste espressioni coi valori generici di $dx$, $dy$, $ds$ del n.° 10, e formando quì le indicate differenze di prodotti, sarà ad eseguite riduzioni, e posto per brevità

$$L=\alpha''(\gamma\beta'-\beta\gamma'),\quad M=\beta''(\gamma'\alpha-\alpha'\gamma),\quad N=\gamma''(\alpha'\beta-\alpha\beta')$$

$$L=\frac{af(a)\,f'(a)\,\Delta^2 sen^2\theta}{\Delta\Delta'}\left(\alpha^2cos^2\theta+\beta^2cos^2\varphi\right)$$

$$M=\frac{\beta^2 f(a)sen^2\varphi cos^2\varphi sen^2\theta}{\Delta\Delta'}\left(f(a)-f(a)\alpha^2sen^2\theta-a\alpha^2f'(a)cos\theta^2\right)$$

$$N=\frac{f(a)\,\Delta^2\Delta'^2cos^2\theta}{\Delta\Delta'}\left(af'(a)\,cos^2\varphi+f(a)\,sen^2\varphi\right)$$

Pongasi

$$V'=L+M+N$$

si troverà

$$V'=\frac{\left(\alpha^2cos^2\theta+\beta^2cos^2\varphi\right)R}{\Delta\Delta'}$$

essendo R la somma che segue, cioè

$$R=af(a)f'(a)cos^2\varphi cos^2\theta+af'(a)f(a)\Delta^2sen^2\theta+f(a)f(a)\Delta'^2sen^2\varphi$$

Dunque se sia $a>f(a)>f(a)$, ed integrando entro i limiti $a$ ed $a'=\sqrt{a^2-f(a)^2}$ per la $a$, si otterrà l'ottava parte del volume dell'ellissoide per mezzo dell'integrale triplo definito.



Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{a'}^{a}\frac{(\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\cos^2\varphi)R}{\Delta\Delta'}\,da d\varphi d\theta=\frac{1}{6}\,\pi a f(a)\,\mathrm{f}(a)$$

Nell'ipotesi di una sfera $a'=0$, $R=a^2$, ed eseguendo l'integrazione riguardo ad $a$, e dividendo per $a^3$ risulterà

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\cos^2\varphi)}{\Delta\Delta'}\,d\varphi d\theta=\tfrac{1}{2}\pi$$

Formola di già trovata al n.° 110, e nella quale consiste il più volte nominato teorema di *Legendre*. Il triplo integrale del volume dell' ellissoide si verifica immediatamente col fare $\alpha=0$, e $\beta=1$; non alterandosi il risultato; allora

$$V'=\frac{\cos^2\varphi R}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}=R\cos\varphi$$

ed insieme

$$R=a\cos^2\varphi\left(\mathrm{f}(a)\,f'(a)\cos^2\theta+f(a)\mathrm{f}'(a)\operatorname{sen}^2\theta\right)+f(a)\,\mathrm{f}(a)\operatorname{sen}^2\varphi$$

Con queste condizioni se si pone

$$A=f(a)\,\mathrm{f}'(a)\quad B=\mathrm{f}(a)\,f'(a)\quad C=f(a)\,\mathrm{f}(a)$$

basta determinare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{a'}^{a}\left(a\cos^3\varphi(A\operatorname{sen}^2\theta+B\cos^2\theta)+C\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\right)da d\varphi d\theta$$

Digitized by Google

ma

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos^3\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\,,\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} sen^2\varphi cos\varphi d\varphi = \frac{1}{3}$$

perciò si ridurrà all'integrale definito duplicato

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{a'}^{a} \frac{[\,2a\,(\,A sen^2\theta + B cos^2\theta\,) + C\,]}{3} da d\theta$$

Nello stesso modo

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\,A sen^2\theta + B cos^2\theta\,)\, d\theta = \frac{\pi}{4}\,(\,A + B\,)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} C d\theta = \tfrac{1}{2}\,\pi C$$

e quindi sarà l'ottava parte del volume dall'integrale definito semplice

$$V = \frac{\pi}{6}\int_{a'}^{a} \Big(a\,(\,A + B\,) + C\Big)\, da$$

ossia

$$V = \frac{\pi}{6}\int_{a'}^{a} \Big(a\,[\,f(a)\,f'(a) + f(a)\,f'(a)\,] + f(a)f(a)\Big) da$$

od anche più compendiosamente

$$V = \frac{\pi}{6}\int_{a'}^{a} \Big(a d.\, f(a)\,f(a) + f(a)\,f(a)\Big) da$$

Digitized by Google

Ora integrando per parti si ha

$$\int_{a'}^{a} f(a)\, \mathrm{f}(a)\, da = af\,(a)\, \mathrm{f}(a) - \int_{a'}^{a} a.d.\, f(a)\, \mathrm{f}(a)$$

dunque finalmente

$$\mathrm{V} = \frac{\pi}{6}\, a f\,(a)\, \mathrm{f}\,(a)$$

come deve essere, mentre $a' f\,(a')\, \mathrm{f}\,(a') = 0$.

14.° Formole più complicate se oltre la variazione degli angoli $\varphi$, $\theta$ si supponesse anche variabile la $r$, ed allora non già la sfera, ma altre superficie riguarda: ma i precedenti risultati dei passati numeri 11°, 12°, 13° sono simili ai risultati che si otterrebbero con le variabili $\mu$, $\nu$ dei numeri 2°, 3°, come può vedersi nella mia precedente memoria: e terminerò la presente con indicarne qualcuno. A questo uopo riprendo le formole del num.° 3.

$$x = \frac{r\mu\nu}{bc}\,,\quad y = \frac{r\sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},\quad z = \frac{r\sqrt{c^2 - \mu^2}.\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

e prendendo le derivate riguardo a, $\mu$, $\nu$, considerando la $r$ costante

$$x' = \frac{r\nu}{bc}\,,\qquad x_1 = \frac{r\mu}{bc}$$

$$y' = \frac{\mathrm{N}r\mu}{\mathrm{M}b\sqrt{c^2 - b^2}}\,,\qquad y_1 = -\frac{\mathrm{M}r\nu}{\mathrm{N}b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z' = -\frac{\mathrm{Q}r\mu}{\mathrm{P}c\sqrt{c^2 - b^2}}\,,\qquad z_1 = -\frac{\mathrm{P}r\nu}{\mathrm{Q}c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Digitized by Google

ove per brevità

$$\sqrt{\mu^2-b^2}=M\,,\ \sqrt{b^2-\nu^2}=N\,,\ \sqrt{c^2-\mu^2}=P\,,\ \sqrt{c^2-\nu^2}=Q.$$

Formando le solite differenze di prodotti X, Y, Z sarà

$$X=\frac{r^2\mu\nu}{bcMNPQ},\ Y=-\frac{r^2(\mu^2-\nu^2)}{PQc\sqrt{c^2-b^2}},\ Z=\frac{r^2(\mu^2-\nu^2)}{MNc\sqrt{c^2-b^2}}$$

Elevandole al quadrato, e chiamando $R^2$ la somma dei quadrati, sarà

$$R=\frac{r^2(\mu^2-\nu^2)}{MNPQ}$$

Moltiplicando per $d\mu d\nu$ ed integrando entro i limiti $c$, $b$ per la $\mu$, e di $b$, o per la $\nu$, si dovrà avere l'ottava parte della superficie sferica nell'integrale definito

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu d\nu}{MNPQ}=\frac{\pi}{2}$$

Tal'è il valore di un integrale definito, trovato dal sig. *Lamé*, e corrisponde all'integrale definito duplicato dal n.° 11.° a variabili $\varphi$, $\vartheta$; anzi trasformando questo, come ha fatto il sig. *Poisson*, a coordinate $\varphi$, $\vartheta$ trovasi verificato mediante il teorema di *Legendre* sulle funzioni ellittiche complete di prima e seconda specie a moduli complementari.

15. Un triplo trascendente di funzioni ellittiche a variabili $\lambda$, $\mu$, $\nu$ si ha dalla cubatura dell'ellissoide, e riprese le formole (2) del n.° 3.° cioè

Digitized by Google

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2}.\sqrt{\mu^2 - b^2}.\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{\lambda^2 - c^2}.\sqrt{c^2 - \mu^2}.\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Differenziandoli completamente, e posto per brevità

$$\sqrt{\lambda^2 - b^2} = G, \quad \sqrt{\lambda^2 - c^2} = H, \quad \sqrt{\mu^2 - b^2} = I$$

$$\sqrt{c^2 - \mu^2} = K, \quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = L, \quad \sqrt{c^2 - \nu^2} = M$$

sarà

$$dx = \frac{\mu\nu d\lambda + \lambda\nu d\mu + \lambda\mu d\nu}{bc}$$

$$dy = \left(\frac{IL\lambda d\lambda}{G} + \frac{GL\mu d\mu}{I} - \frac{GI\nu d\nu}{L}\right) \frac{1}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$dz = \left(\frac{KM\lambda d\lambda}{H} - \frac{HM\mu d\mu}{K} + \frac{HK\nu d\nu}{M}\right) \frac{1}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Quindi formando un paragone coi valori generici di $dx$, $dy$, $dz$ del n.° 10.° si avranno le più volte indicate differenze di prodotti

Digitized by Google

$$\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)\,\mathrm{KMG}}{c^2(c^2 - b^2)\,\mathrm{HIL}}$$

$$\beta''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma') = \frac{\mu^2(\gamma^2 - \nu^2)\,\mathrm{KMI}}{c^2(c^2 - b^2)\,\mathrm{GKL}}$$

$$\gamma''(\alpha'\beta - \beta'\alpha) = \frac{\nu^2(\lambda^2 - \mu^2)\,\mathrm{HKL}}{c^2(c^2 - b^2)\,\mathrm{GMI}}$$

Sommando questi tre valori, ed osservando che

$$\lambda^4(\mu^2-\nu^2)+\mu^4(\nu^2-\lambda^2)+\nu^4(\lambda^2-\mu^2)=(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)$$

e moltiplicando per $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, si ottiene l'ottava parte del volume dell'ellissoide, cioè

$$\int_0^b \int_c^b \int_c^\lambda \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\mathrm{GHIKLM}} d\lambda d\mu d\nu = \frac{\pi}{6}\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}.\sqrt{\lambda^2-c^2}$$

$c$, $\lambda$, sono i limiti di $\lambda$, mentre $b < c$; ed i limiti $b$, o, sono per la $\nu$, e $b$, $c$ per la $\mu$. Questa formola ancora è stata data dal sig. *Lamé*, e corrisponderà al primo integrale triplo del n.° 13.° a variabili a, $\varphi$ $\theta$.

Digitized by Google

## NOTA.

Nel num.° 8.° di questa memoria sono arrivato al valore di un integrale definito duplicato, il quale è incluso in una formola generale data dal sig. *Poisson*, e che riporterò in poche parole.

Sieno $a$, $b$, $c$ tre costanti reali, e $p$, $q$ due coordinate polari determinate dalle formole

$$u = \cos p \,, \quad v = \operatorname{sen} p \cos q \,, \quad w = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q$$

e ponendo

$$P = au + bv + cw$$

sia $f(P)$ una funzione qualunque di P; si domanda la riduzione dell'integrale definito duplicato

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} f(au + bv + cw) \operatorname{sen} p \, dp \, dq$$

ad un integrale definito semplice, i limiti, 0, $\pi$ sono per l'angolo $p$, e $\pi$, $-\pi$ per l'angolo $q$. Questo integrale si riduce facilmente, esprimendo le costanti $a$, $b$, $c$ per altre coordinate polari, $p'$, $q'$ cioè

$$a = r' \cos p' \,, \quad b = r' \operatorname{sen} p' \cos q' \,, \quad c = r' \operatorname{sen} p' \operatorname{sen} q'$$

ed ove

$$r' = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

Digitized by Google

quindi con queste sostituzioni il valore di P, diviene

$$P = r'\left(cospcosp' + senpsenp'cos\,(q - q')\right)$$

In questa formola ognun vede che le quantità $p$, $p'$ sono due lati di un triangolo sferico, e $\frac{P}{r'}$ sarà il coseno del terzo lato opposto all'angolo $q$—$q'$. Ora la scelta dell'angolo $q$, è pienamente arbitraria: per cui senza togliere nulla alla generalità, si potrà supporre $q=q'$, e la P si riduce semplicemente ad

$$P = r'cos\,(p - p')$$

dunque integrando riguardo a $q$, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(P)senpdpdq = 2\pi\int_{0}^{\pi} f\left(r'cos(p-p')\right)senpdp$$

Si pone anche sotto una forma più semplice potendosi supporre $p' = 0$, per cui si avrà

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(P)senpdpdq = 2\pi\int_{0}^{\pi} f\left((a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}cosp\right)senpdp$$

Tal'è la formola generale data dal sig. *Poisson*, e che contiene un gran numero d'integrali definiti. Sieno ora A, B, C tre costanti reali, e talmente scelte che il trinomio

$$Q^2 = Au^2 + Bv^2 + Cw^2$$

Digitized by Google

rimanga positivo per tutti i possibili valori reali delle $u$, $v$, $w$, e si componga l'integrale definito duplicato

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right)\frac{senpdpdq}{Q^3}$$

il quale facilmente si ridurrà all'antecedente; ed infatti chiamando $\theta$, $\omega$, due altre coordinate polari; e se si ponga

$$\xi = cos\theta\,,\quad \eta = sen\theta cos\omega\,,\quad \zeta = sen\theta sen\omega$$

dovendo esse verificare

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

potranno essere date in funzione della $p$, $q$ per mezzo delle formole

$$\xi = \frac{A^{\frac{1}{2}}u}{Q},\quad \eta = \frac{B^{\frac{1}{2}}v}{Q},\quad \zeta = \frac{C^{\frac{1}{2}}w}{Q}$$

quindi se si faccia

$$a = a'A\,,\quad b = b'B\,,\quad c = c'C$$

si avrà

$$\frac{P}{Q} = a'\xi + b'\eta + c'\zeta = P'$$

Essendo poi i limiti degli angoli $\theta$, $\omega$ i medesimi che

Digitized by Google

per gli angoli $p$, $q$, compongasi il nuovo integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(a'\xi + b'\eta + c'\zeta)\, sen\vartheta d\vartheta d\omega$$

Avremo

$$cos\theta = \frac{A^{\frac{1}{2}} cosp}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad tang\omega = \frac{C^{\frac{1}{2}}}{B^{\frac{1}{2}}} tangq$$

quindi differenziando come al num.° 9.° e ponendo

$$A' = Bcos^2q + Csen^2q$$

si ottiene

$$sen\theta d\theta = \frac{A'A^{\frac{1}{2}} senpdp}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad d\omega = \frac{B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} dq}{A'}$$

d'onde

$$sen\theta d\theta d\omega = \frac{A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} senpdpdq}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dunque

$$\int_{\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right)\frac{senpdpdq}{Q^3} = \frac{1}{(ABC)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(P')\, sen\theta d\theta d$$

Digitized by Google

Ed essendo i medesimi limiti si avrà per la formola del sig. *Poisson*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right)\frac{senpdpdq}{Q^3} = \frac{2\pi}{(ABC)^{\frac{1}{2}}}\int_{0}^{\pi} f(k\cos p)\,senpdp$$

ove

$$\left(a'^2 + b'^2 + c'^2\right)^{\frac{1}{2}} = k = \left(\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Quest'ultimo integrale, con altri del medesimo genere, trovasi nel quinto volume degli *Esercizi di matematica* del sig. *Cauchy*. Supponendo la funzione ridotta all'unità, abbiamo l'integrale definito del n.° 8.°

Digitized by Google

ARTICOLO ESTRATTO DAL GIORNALE ARCADICO

TOMO LXXXII.

Digitized by Google

Digitized by Google

# SUI LIMITI

DI ALCUNE

# ESPRESSIONI IMMAGINARIE

*MEMORIA*

DI BARNABA TORTOLINI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME NELL' ARCHIGINNASIO DELLA SAPIENZA E PROFESSORE DI FISICA MATEMATICA NEL COLLEGIO URBANO DI PROPAGANDA FIDE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1841

Digitized by Google

Digitized by Google

*Sui limiti dell'espressioni*

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad , \quad \frac{sen\alpha}{\alpha}$$

*quando all' infinitesimo* $\alpha$ *reale si sostituisca l'infinitesimo immaginario* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

---

1.° È noto che chiamando $\alpha$, un infinitesimo reale, i limiti, verso i quali convergono le due espressioni

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad , \quad \frac{sen\alpha}{\alpha}$$

quantunque per valori nulli di $\alpha$, si presentino sotto le forme indeterminate

$$1^{\pm\infty} \quad , \quad \frac{0}{0}$$

Contuttociò si verifica

Digitized by Google

$$lim\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e\,,\quad lim\,\frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$$

ove $e$ denota la base dei logaritmi iperbolici. La ricerca di questi due limiti è di somma importanza nel calcolo infinitesimale, e da essi dipende la differenziazione di qualsisia funzione. Conviene però accertarsi, se questi limiti rimangano invariabili, quando in luogo dell'infinitesimo $\alpha$ reale si sostituisca l'immaginario della solita forma

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

La presente breve memoria verserà unicamente sulla ricerca dei limiti verso i quali convergono le due espressioni

$$(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}\,,\quad \frac{sen\,(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

per valori nulli di $\alpha$ e $\beta$, supponendo cogniti i limiti delle medesime espressioni a variabile reale.

2.° Un'espressione qualunque immaginaria gode della proprietà di potersi rappresentare sotto la forma trigonometrica

$$r\,(cos\,t+\sqrt{-1}.sen\,t)$$

essendo $r$ una quantità reale, e $t$ un arco parimenti reale, e si avrebbe

Digitized by Google

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = r\,(cost + \sqrt{-1}.\,sent)$$

d'onde necessariamente

$$\alpha = rcost\,,\quad \beta = rsent$$

dalle quali $r$, $t$ sono determinati dalle condizioni

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2\,,\quad tangt = \frac{\beta}{\alpha}$$

ed insieme

$$r = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \qquad t = n\pi + arc.\,tang\,\frac{\beta}{\alpha}$$

purchè s'intenda per la notazione *arc tang* $v$ un arco compreso fra $\frac{\pi}{2}$, e $-\frac{\pi}{2}$: la quantità $r$ dicesi il *modulo* dell'espressione immaginaria, e $t$ l'*argomento*. Ciò posto, una quantità immaginaria dicesi infinitesima, se infinitesime sieno le variabili $\alpha$ e $\beta$ che la compongono, in modo che

$$lim\,(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 0$$

racchiude necessariamente

$$lim\,\alpha = 0\,,\quad lim\,\beta = 0$$

per le quali anche il modulo $r$ convergerà verso il medesimo limite, ossia

$$lim.\,r = 0.$$

Digitized by Google

All'opposto l'argomento $t$ rimane di valore finito, mentre si avrebbe

$$lim\ tangt = lim.\frac{\beta}{\alpha} = \frac{0}{0}$$

E chiamando $\tau$ l'angolo corrispondente a questo limite, si dedurrà semplicemente

$$tang\,\tau = lim\frac{\beta}{\alpha}.$$

3.° Si riprenda ora l'espressione ad infinitesimo reale

$$lim\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

sarà fuori del limite

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e+i$$

essendo $i$ una quantità da svanire simultaneamente ad $\alpha$, quindi chiamando $x$ una quantità qualunque variabile, ed indipendente da $\alpha$, avremo la nuova equazione

$$(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = (e+i)^{x}$$

e passando ai limiti si ottiene

Digitized by Google

$$lim\ (1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}} = e^{x}$$

ove senza alterarne il valore si potrà sostituire anche $\alpha x$ invece di $\alpha$, per cui

$$lim\ (1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{x}.$$

Quest'ultima formola, che sussiste per $x$ reale, si potrà estendere per l' immaginaria $x\sqrt{-1}$, potendo in quest' ultimo caso servirsene per fissare il senso della notazione $e^{x\sqrt{-1}}$, cioè

$$lim\ (1+\alpha x\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha}} = e^{x\sqrt{-1}}$$

e fuori del limite si potrà scrivere

$$(1+\alpha x\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha}} = e^{x\sqrt{-1}} + I$$

I rappresenta un infinitesimo con $\alpha$. Elevando adesso il primo, e secondo membro all'esponente immaginario

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

e passando ai limiti otterremo

Digitized by Google

$$lim\left(1+\alpha x\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\alpha\sqrt{-1}}}=e^{x}$$

che per $x=1$ si riduce a

$$lim\left(1+\alpha\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{\alpha\sqrt{-1}}}=e.$$

Rimane pertanto dimostrato, che se in vece di $\alpha$ reale si sostituisca l'immaginaria $\alpha\sqrt{-1}$, il limite dell'indicato binomio seguita ad essere la base dei logaritmi iperbolici.

4.° Supponiamo adesso che l'immaginaria risulti delle due parti $\alpha$, e $\beta\sqrt{-1}$; in questo caso è facile vedere che il trinomio

$$1+\alpha+\beta\sqrt{-1}=(1+\alpha)\left(1+\frac{\beta}{1+\alpha}\sqrt{-1}\right)$$

porgerà col porre l'infinitesimo reale

$$\frac{\beta}{1+\alpha}=\theta$$

$$(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}(1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}}$$

nella quale i fattori del secondo membro si potranno rappresentare per

Digitized by Google

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1}}}$$

$$(1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = \left((1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\theta\sqrt{-1}}}\right)^{\frac{\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1}}{(1+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{-1})(1+\alpha)}}$$

Passando ai limiti col fare $\alpha = 0$, $\beta = 0$, e ponendo per brevità

$$\varepsilon = lim\ \frac{\beta}{\alpha}$$

ed avvertendo che per valori reali di $\alpha$ e $\theta$

$$lim\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = lim\ (1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\theta\sqrt{-1}}}$$

si dedurrà

$$lim\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{\frac{1}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

$$lim\ (1+\theta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{\frac{\varepsilon\sqrt{-1}}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

Digitized by Google

quindi il nuovo limite che si cerca, sarà

$$lim\,(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{\frac{1}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}} \cdot e^{\frac{\varepsilon\sqrt{-1}}{1+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

la quale si riduce evidentemente a

$$lim\,(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e$$

come si ha nel caso della variabile reale.

5.° Per la determinazione del limite verso, il quale converga il rapporto del seno all'arco nel caso della variabile immaginaria, cercheremo prima il limite del binomio (*)

$$(1+\alpha x\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha}}$$

per valori piccolissimi di $\alpha$, essendo $x$ una quantità reale; chiamando ora $m$ un numero convergente verso l'infinito, e fatto

$$\alpha = \frac{1}{m}$$

si supponga come al num. 2.°

$$1+\frac{x}{m}\sqrt{-1} = r\,(cost + \sqrt{-1}.\,sent)$$

---

(*) Cauchy, Résumés analytiques.

Digitized by Google

e si avrà

$$r = \left(1 + \frac{x^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} , \; tangt = \frac{x}{m}$$

quindi come già è cognito

$$\left(1 + \frac{x}{m}\sqrt{-1}\right)^m = r^m \left(cosmt + \sqrt{-1}.\, senmt\right).$$

Ora è facile il vedere che

$$lim\, r^m = lim. \left\{\left(1 + \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}\right\}^{\frac{1}{2m}} = e^{x^2 lim \frac{1}{2m}} = 1$$

$$lim \frac{tangt}{t} = 1 = lim \frac{x}{mt}$$

d'onde $lim\; mt = x$ .

Con questi valori il significato dell'esponenziale $e^{x\sqrt{-1}}$ verrà definito dalla formola

$$e^{x\sqrt{-1}} = cosx + \sqrt{-1}.\, sen\, x$$

Questa dà immediatamente

$$senx = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Digitized by Google

la quale sussiste per valori reali della $x$, e potrà estendersi a valori immaginari, servendo il secondo membro per rappresentare la notazione

$$senx = sen\,(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

Con queste avvertenze si faccia

$$e^{2x\sqrt{-1}} - 1 = \theta, \text{ ossia } 2x\sqrt{-1} = log\,(1+\theta)$$

avremo

$$\frac{senx}{x} = \frac{1}{(1+\theta)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{log\,(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}$$

$\theta$ rappresenta nella generalità un infinitesimo immaginario; e si avrà per conseguenza

$$ltm.\frac{senx}{x} = lim.\frac{1}{log\,(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}$$

E siccome qualunque sia $\theta$, e reale ed immaginario

$$lim\,log\,(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = loge = 1$$

così stabiliremo in generale per $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$

$$lim\,\frac{sen\,(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = 1$$

Digitized by Google

come succede nel caso della variabile reale. Inoltre dall'equazione che porge il rapporto del seno all'arco in funzione della $\theta$ si ottiene reciprocamente

$$(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = e^{\frac{x}{(1+\theta)^{\frac{1}{2}} senx}}$$

e passando ai limiti

$$lim\,(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = e^{lim\frac{x}{senx}}$$

cioè il limite di una espressione dipende dal limite dell'altra.

6.° La ricerca degli indicati due limiti si può anche ottenere mediante la riduzione dell'espressioni immaginarie alla forma

$$A + B\sqrt{-1}$$

e che verremo ad'esporre brevemente.

Se con le due quantità immaginarie

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}\ ,\ m + n\sqrt{-1}$$

si formi la potenza

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$$

e si ritenga

$$\alpha = r cost\ ,\ \beta = r sent\ ,\ tangt = \frac{\beta}{\alpha}$$

Digitized by Google

abbiamo dalla riduzione di queste espressioni

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = e^{G}(cosE+\sqrt{-1}.senE)$$

quando per brevità si ponga

$$E = nlogr + mt\ ,\ G = mlogr - nt$$

Si sostituisca $1+\alpha$ invece di $\alpha$, e si chiami R, e T il modulo e l'argomento dell'espressione immaginaria

$$1+\alpha+\beta\sqrt{-1} = 1+r(cost+\sqrt{-1}.sent)$$

o, ciò che torna lo stesso, pongasi

$$1+r(cost+\sqrt{-1}.sent) = R(cosT+\sqrt{-1}.senT)$$

si avrà con gran facilità

$$R = (1+2rcost+r^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\ tang\,T = \frac{rsent}{1+rcost}$$

quindi risulterà

$$(1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = e^{G}(cosE+\sqrt{-1}.senE)$$

ove in questo caso

$$E = nlogR + mT\ ,\ G = mlog\,R - nT$$

Queste ultime formole ci daranno la riduzione del

Digitized by Google

cognito binomio alla forma $A + B\sqrt{-1}$; ed infatti per l'eguaglianza

$$\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = m + n\sqrt{-1}$$

si ha

$$m = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad n = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

ovvero

$$m = \frac{cost}{r} \qquad n = -\frac{sent}{r}$$

e perciò le quantità E e G si trasformano in

$$E = \frac{T cost}{r} - \frac{sent log R}{r}, \quad G = \frac{T cost}{r} + \frac{sent log R}{r}$$

d'onde riuscirà

$$(1 + \alpha + \beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e^{G}\,(cos E + \sqrt{-1}.sen E)$$

Nel prendere il limite di quest'ultima espressione si dovrà fare nel secondo membro $r = 0$, e mutare $t$ in $\tau$; non apparisce però immediatamente il limite verso il quale converga il secondo membro, mentre per $r = 0$, si verifica

Digitized by Google

$$R = 1\,, \quad T = 0\,, \quad log\,R = 0$$

quando per T si prenda l'arco compreso fra $\frac{\pi}{2}$, e $-\frac{\pi}{2}$, per cui le due espressioni

$$\frac{log R}{r}\,, \quad \frac{T}{r}$$

si presentano sotto una forma indeterminata di $\frac{0}{0}$: Facciasi pertanto

$$2rcost + r^2 = \theta$$

$\theta$ convergerà verso lo zero con $r$, e si ricava

$$r = \frac{\theta}{2cost + r}$$

quindi

$$R = (1 + \theta)^{\frac{1}{2}} \qquad log R = \frac{log\,(1 + \theta)}{2}$$

ed insieme

$$\frac{log R}{r} = \left(cost + \frac{r}{2}\right) log \left(1 + \theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

Per la frazione $\frac{T}{r}$ ponendo primieramente

Digitized by Google

$$\frac{T}{r} = \frac{tang T}{r} \cdot \frac{T}{tang T}$$

si ottiene

$$\frac{T}{r} = \frac{sent}{1 + r cost} \cdot \frac{T}{tang T}$$

Passando ora ai limiti, ed osservando che per valori reali di $\theta$ e T

$$lim\ log\ (1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = 1\ ,\ lim\ \frac{T}{tang T} = 1$$

si avrà

$$lim\ \frac{log R}{r} = cos\tau\ ,\ lim\ \frac{T}{r} = sen\tau$$

dalle quali

$$lim E = 0\ ,\ lim G = cos^2\tau + sen^2\tau = 1$$

dunque in fine

$$lim\ (1+\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}} = e\ .$$

7.° Per la riduzione del seno di arco immaginario sarà della formola dell'esponenziale immaginario

$$sen\ (\alpha+\beta\sqrt{-1}) = P sen\ (r cost) + Q cos\ (r cost)\sqrt{-1}$$

Digitized by Google

quando per brevità pongasi

$$P = \frac{e^{rsent} + e^{-rsent}}{2}, \quad Q = \frac{e^{rsent} - e^{-rsent}}{2}$$

quindi avremo

$$\frac{sen(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{P\,sen(rcost) + Q\,cos(rcost)\sqrt{-1}}{r(cost + \sqrt{-1}.sent)}$$

Si ponga

$$\frac{sen(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = M + N\sqrt{-1}$$

ricaveremo con facilità i valori di M, N, cioè

$$M = \frac{P\,sen(rcost)\,cost}{r} + \frac{Q\,cos(rcost)\,sent}{r}$$

$$N = \frac{Q\,cos(rcost)\,cost}{r} - \frac{P\,sen(rcost)\,sent}{r}$$

e dovrà verificarsi

$$lim\,\frac{sen(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = lim\,M + lim\,N\sqrt{-1}$$

Per conoscere i limiti, verso i quali convergono le quantità M, N, dovremo fare al solito $r = 0$, e mutare $t$ in $\tau$; conviene però prima eseguire una trasformazione di variabili nella seconda parte del va-

Digitized by Google

lore di M, e nella prima di N e che consiste a fare

$$e^{2r\,sen\,t} - 1 = \theta$$

$\theta$ sarà un infinitesimo con la $r$ convergendo simultaneamente verso lo zero, e si ottiene

$$e^{2r\,sen\,t} = 1 + \theta\,, \quad 2r\,sen\,t = \log(1+\theta)$$

d'onde l'espressioni di M, N si trasformano in

$$M = P\cos^2 t\,\frac{sen\,(r\cos t)}{r\cos t} + e^{-r\,sen\,t}\,sen^2 t\,\frac{1}{\log(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}$$

$$N = sen t\cos t\left\{\frac{\cos(r\cos t)}{\log(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}} - P\,\frac{sen\,(r\cos t)}{r\cos t}\right\}$$

Di più per $r = 0$ si ha $P = 1$, e per conseguenza

$$\lim M = \cos^2\tau \lim\frac{sen\,(r\cos t)}{r\cos t} + sen^2\tau \lim\frac{1}{\log(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}$$

$$\lim N = sen\tau\cos\tau\left\{\lim\frac{1}{\log(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}} - \lim\frac{sen\,(r\cos t)}{r\cos t}\right\}$$

Ma si è dimostrato che per valori reali delle variabili

Digitized by Google

$$lim.\ \frac{sen\,(r\cos t)}{r\cos t} = 1\ ,\quad lim.\ log\,(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = 1$$

dunque

$$lim.\ M = 1^{*},\quad lim.\ N = 0$$

e si dedurrà in fine

$$lim.\ \frac{sen\,(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = 1$$

come già si è dimostrato in altra maniera.

Per mezzo della ricerca di questi due limiti facilmente si stabilisce nel calcolo infinitesimale, che il differenziale di qualsisia funzione si mantiene della stessa forma, quando la variabile divenisse immaginaria.

L'esposte riflessioni saranno apprezzate da chiunque giustamente non voglia desumere il passaggio del reale all'immaginario dalla generalità dell'algebra, ma dedurlo bensì da principii certi ed incontrastabili.

ARTICOLO ESTRATTO DAL GIORNALE ARCADICO
TOMO LXXXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google